

Electrodynamics of the atmosphere (in Russian)

Yumashev, Dmitry and Krainov, Vladimir

2006

MIMS EPrint: **2011.77**

Manchester Institute for Mathematical Sciences
School of Mathematics

The University of Manchester

Reports available from: <http://eprints.maths.manchester.ac.uk/>

And by contacting: The MIMS Secretary
School of Mathematics
The University of Manchester
Manchester, M13 9PL, UK

ISSN 1749-9097



Московский Физико-Технический Институт

(государственный университет)

Д. В. Юмашев, В. П. Крайнов

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
АТМОСФЕРЫ

Учебно-методическое пособие по курсу
"Электродинамика сплошных сред"

Составители: Д. В. Юмашев
В. П. Крайнов

МОСКВА 2006

Оглавление

Предисловие	4
Глава 1. Электромагнитное поле в веществе	7
Задача 1. Формулы Друде для проводимости и диэлектрической проницаемости проводника	7
Задача 2. Затухание электромагнитной волны, проникающей в проводник (скин-эффект)	11
Задача 3. Формула Дебая для частотной дисперсии поляризуемости диэлектрика. Принцип причинности	17
Глава 2. Рассеяние солнечного света в атмосфере	27
Задача 4. Рассеяние солнечного света на малых металлических пылинках	27
Задача 5. Поглощение солнечного света малыми металлическими пылинками	38
Задача 6. Рассеяние и поглощение солнечного света малыми диэлектрическими пылинками	44
Задача 7. Рассеяние солнечного света на флуктуациях плотности и на отдельных молекулах	52
Задача 8. Давление солнечного света на малые пылинки в атмосфере	59
Задача 9. Рассеяние солнечного света на свободных электронах и атомах в ионосфере	61
Глава 3. Распространение электромагнитных волн в ионосфере	64

Задача 10. Распространение электромагнитных волн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли	64
Задача 11. Низкочастотные собственные электромагнитные колебания в атмосфере, вызываемые грозовыми разрядами	68
Задача 12. Отражение радиоволн от E-слоя ионосферы	72
Задача 13. Отражение радиоволн от F-слоя ионосферы	77
Задача 14. Сдвиг фазы радиоволны при отражении от ионосферы. Групповое запаздывание	80
Задача 15. Отражение высокочастотной радиоволны от ионосферы (теория малых возмущений)	85
Задача 16. Отражение высокочастотной радиоволны от ионосферы (метод Ландау–Дыхне)	90
Задача 17. Бесстолкновительное затухание продольных плазменных волн на электронах (затухание Ландау)	97
Глава 4. Взаимодействие солнечного ветра с магнитным полем Земли	111
Задача 18. Оценки для верхней и нижней границ магнитосферы Земли	111
Задача 19. Движение протонов вдоль силовых линий магнитного поля Земли. Полярные сияния	113
Задача 20. Дрейф протонов в экваториальной плоскости Земли	119
Список литературы	126

Предисловие

Задачи с подробными решениями, включенные в настоящее пособие, в течение ряда лет рассматривались на семинарах со студентами Факультета аэромеханики и летательной техники МФТИ. Авторы поставили себе целью в простой и увлекательной форме рассказать о различных электродинамических явлениях, происходящих в атмосфере и ионосфере Земли. К таким явлениям в первую очередь можно отнести *рассеяние солнечного света в атмосфере, распространение электромагнитных волн в ионосфере, а также движение заряженных частиц солнечного ветра в магнитном поле Земли*; каждой из этих трех категорий посвящена отдельная глава пособия (соответственно *вторая, третья и четвертая*).

Тем не менее для лучшего понимания излагаемого в основной части пособия материала требуется знакомство с общими электродинамическими свойствами материальной среды. Именно по этой причине в самом начале пособия мы поместили три фундаментальные задачи, выделенные в отдельную главу. Первая задача посвящена *формуле Друде*, которая дает неплохую модель зависимости диэлектрической проницаемости и проводимости любой макроскопической среды от частоты действующего на нее электрического поля. Вторая задача охватывает широкий круг вопросов, связанных с проникновением переменного электромагнитного поля различных частот в проводник (*скин-эффект*). Подобный материал очень важен для систематизации представлений о всевозможных предельных случаях, используемых при теоретическом описании электродинамики проводника (например, *квазистационарное приближение, высокочастотное приближение* и

т.д.). Наконец, в третьей задаче выводится *формула Дебая* для частотной дисперсии диэлектрической проницаемости полярных диэлектриков в переменных полях. Релаксация полярных молекул в изменяющемся со временем электрическом поле тесно связана с *принципом причинности*, непосредственно следующим из формулы Дебая. Студентам, несомненно, будет полезен и привлекаемый для доказательства принципа причинности математический аппарат (*преобразование Фурье*).

Чтобы уверенно читать материал пособия, необходимо знать основы теории электричества и магнетизма в объеме курса общей физики, а также стандартный курс высшей математики. В ходе решения задач раскрываются методические приемы, которыми обычно пользуются теоретики для получения наглядных результатов. Такая форма пособия является оптимальной с точки зрения знакомства с предметом теоретической физики на третьем курсе института.

В задачах трех основных глав пособия рассматриваются различные стороны одной общей темы, причем для решения конкретной задачи, как правило, не требуется знать решение предыдущих задач. Авторы отдают себе отчет, что при избранном ими стиле подачи материала могут возникнуть определенные трудности, так как зачастую от читателя требуются познания самого разного уровня сложности. Не все утверждения обосновываются строго; отдельные из них предоставляются студенту для самостоятельного доказательства на основе его знаний в общей физике, что направлено на развитие физической интуиции. Наиболее сложные выводы даются полностью.

Подчеркнем, что акцент при выборе задач был сделан на электрических и магнитных свойствах атмосферы и ионосферы в соответствии с профилем Факультета аэромеханики и летательной техники МФТИ. Материал пособия может быть полезен для расширения кругозора у студентов, которые в своей специальности имеют дело с физикой атмосферы. Во многих случаях приводятся числовые оценки и примеры, позволяющие нагляднее интерпрети-

ровать теоретические результаты. В пособии использовалась система единиц CGSE.

Авторы хотят выразить особую благодарность В.Л. Юмашеву за помощь в оформлении пособия в системе \LaTeX , а также Е.В. Юмашевой, которая дала ряд полезных советов по литературному оформлению учебного пособия.

Москва-Манчестер, декабрь 2005.

Глава 1

Электромагнитное поле в веществе

Задача 1. Формулы Друде для проводимости и диэлектрической проницаемости проводника.

Получить формулу Друде для диэлектрической проницаемости среды на частоте ω , создаваемой свободными и связанными электронами. Частота столкновений электронов с другими объектами (фононами кристаллической решетки, другими электронами, примесными центрами, ионами в газе и т.п.) равна ν .

Решение. Уравнение движения связанного в атоме или молекуле электрона под действием внешнего электрического поля с напряженностью $E(t) = E_0 \exp(-i\omega t)$, направленного для определенности вдоль оси x , имеет вид

$$m\ddot{x} = -m\omega_k^2 x - m\nu\dot{x} - eE_0 \exp(-i\omega t). \quad (1.1)$$

Здесь ω_k – частота собственных колебаний электрона в атоме (или молекуле), m , e – масса и заряд электрона. Движение свободного электрона также подчиняется этому уравнению, если положить собственную частоту ω_k равной нулю. Сила трения $m\nu\dot{x}$ обусловлена столкновениями электрона с другими объектами, замедляющими его ускорение во внешнем электрическом поле при движении в веществе. Каждое столкновение приводит к рассеянию электрона из разгоняемого полем пучка; в грубом приближении теряемый электроном импульс в среднем составляет $m\dot{x}$, и для силы трения (импульса, теряемого в единицу времени) получается

выражение $m\nu\dot{x}$. Величина $\tau = 1/\nu$ суть время между двумя последовательными столкновениями электрона. То обстоятельство, что для описания движения электрона используются законы ньютоновской, а не квантовой механики, является отличительной чертой классической электродинамики сплошной среды. Тем не менее подобный подход дает качественно верные результаты.

Вынужденное решение уравнения (1.1) есть $x = x_0 e^{-i\omega t}$, где

$$x_0 = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \omega_k^2 + i\nu\omega)}.$$

Индукцированный дипольный момент, создаваемый электроном, таким образом, равен

$$p(t) = -ex(t) = -\frac{e^2 E(t)}{m(\omega^2 - \omega_k^2 + i\nu\omega)}. \quad (1.2)$$

Умножая (1.2) на концентрацию электронов n_e и производя суммирование по всем собственным частотам связанного движения, получим поляризацию среды:

$$P(t) = -\frac{n_e e^2 E(t)}{m} \sum_k \frac{f_k}{(\omega^2 - \omega_k^2 + i\nu\omega)}.$$

Величина f_k называется силой k -го осциллятора. Поскольку электрическая индукция монохроматического поля на данной частоте составляет

$$D = E + 4\pi P = \varepsilon(\omega)E, \quad ^1)$$

приходим к следующему общему выражению для частотной дисперсии *диэлектрической проницаемости* $\varepsilon(\omega)$, которое и называют *формулой Друде* (P. Drude, 1900):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 \sum_k \frac{f_k}{(\omega^2 - \omega_k^2 + i\nu\omega)}. \quad (1.3)$$

¹⁾Это соотношение может считаться определением диэлектрической проницаемости сплошной среды.

Здесь мы определили так называемую *плазменную частоту*

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}.$$

Подчеркнем, что в рамках уравнения (1.3) *нет различия* между проводящей средой и диэлектрической. Если поляризация среды создается преимущественно свободными электронами, то все $\omega_k = 0$, и формула Друде приобретает более простой вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (1.4)$$

В этом виде она используется, в частности, в задаче 4. Такая формула применима в большей степени к проводникам.

Формула Друде позволяет установить зависимость *проводимости металла* σ от частоты внешнего монохроматического поля $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$. Записывая второе уравнение Максвелла в двух формах, соответствующих представлению вещества как металла и как диэлектрика, и пренебрегая вкладом связанных электронов в поляризацию, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma(\omega)}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon(\omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad 2)$$

С использованием формулы (1.4) для диэлектрической проницаемости находим выражение для проводимости металла на данной частоте:

$$\frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) - i \frac{\omega}{c} = -i \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \right).$$

После упрощений окончательно получаем формулу, также называемую *формулой Друде*:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad (1.5)$$

²⁾Выражение $\mathbf{j} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$ является обобщением статического закона Ома на случай переменных полей. Оно, по сути дела, связывает не сами плотность тока и напряженность электрического поля как функции времени, а их *фурье-компоненты*. Подробнее об этом см. в конце задачи 3.

где $\tau = 1/\nu$. Здесь мы ввели в рассмотрение *статическую проводимость*

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = \frac{\omega_p^2 \tau}{4\pi},$$

которая оказывается пропорциональной времени свободного пробега электронов и их концентрации в проводнике. В низкочастотном пределе $\omega\tau \ll 1$ ($\omega \ll \nu$) проводимость металла близка к статической проводимости и в главном приближении является вещественной. Напротив, в высокочастотном пределе $\omega\tau \gg 1$ проводимость металла становится чисто мнимой:

$$\sigma(\omega) = i \frac{\sigma_0}{\omega\tau} = i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} \quad (1.6)$$

и перестает зависеть от τ , а определяется только электронной концентрацией, входящей в ω_p . К примеру, для меди при комнатной температуре $\tau = 2.7 \cdot 10^{-14}$ с, так что формула (1.6) начинает работать уже с частот видимого диапазона.

Вернемся, однако, к диэлектрической проницаемости металла. Статическая проводимость σ_0 и плазменная частота ω_p – величины, измеряемые экспериментально. Поэтому целесообразно выразить $\varepsilon(\omega)$ через них. Подставляя связь, вытекающую из определения σ_0 , в общее выражение (1.4), находим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{1}{(\omega/\omega_p)^2 + i\omega/4\pi\sigma_0}.$$

Формула (1.4) упрощается в низкочастотном пределе $\omega \ll \nu$ (т.е. $4\pi\sigma_0\omega \ll \omega_p^2$):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}.$$

Соотношение величин σ_0 и ω при этом может быть произвольным. Данный предел обеспечивает применимость статического *закона Ома* $\mathbf{j}(t) = \sigma_0 \mathbf{E}(t)$ для тока проводимости. Упрощение формулы

(1.4) имеет место также и в противоположном высокочастотном пределе $\omega \gg \nu$:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

Соотношение между частотами ω и ω_p вновь может быть произвольным.

Отметим в заключение, что комплексные или отрицательные значения диэлектрической проницаемости соответствуют наличию поглощения поля в среде. Подробнее об этом написано в задаче 2.

Задача 2. Затухание электромагнитной волны, проникающей в проводник (скин-эффект).

Рассмотреть затухание электромагнитного поля при нормальном падении монохроматической электромагнитной волны на поверхность металла (скин-эффект).

Решение. Обозначим через $\varepsilon(\omega)$ диэлектрическую проницаемость металла и запишем уравнения Максвелла для поля внутри него: ³⁾

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon(\omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \quad (2.1)$$

Будем полагать, что волновой вектор \mathbf{k} электромагнитной вол-

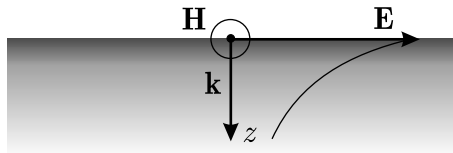


Рис. 1

³⁾Магнитная проницаемость предполагается равной единице.

ны направлен по оси z , которая является нормалью к поверхности; положительные значения z отсчитываются вглубь металла (рис. 1). Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} параллельны плоскости раздела двух сред. Действуя оператором rot на первое уравнение и подставляя электрическое поле из второго, получаем замкнутое уравнение для изменения напряженности магнитного поля H вдоль оси z :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\frac{(\varepsilon' + i\varepsilon'')\omega^2}{c^2} H,$$

где $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Его решение, затухающее вглубь металла ($z > 0$), имеет вид

$$H(z, t) = H_{in} \exp(ik'z - i\omega t) \exp(-k''z), \quad k'' > 0.$$

Здесь мы ввели комплексное волновое число

$$k = k' + ik'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''}.$$

Таким образом, электромагнитное поле проникает в металл на небольшую глубину, называемую *скин-слоем*; его характерная толщина, очевидно, составляет $\delta = 1/k''$. В рамках модели Друде диэлектрическая проницаемость металла равна (см. формулу (1.4) предыдущей задачи)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - i\nu)}{\omega(\omega^2 + \nu^2)},$$

где ν – частота столкновений электрона с различными объектами (другими электронами, фононами и т.д.). Значит,

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\nu\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (2.2)$$

Общие выражения для вещественной и мнимой частей волнового числа $k \sim \sqrt{\varepsilon}$ получаются весьма громоздкими, поэтому остановимся только на предельных случаях для низких и высоких

частот электромагнитного поля, рассмотренных в конце решения задачи 1. Глубина скин-слоя при этом определяется соотношениями между тремя величинами: ω , ω_p и ν .

1. В *низкочастотном пределе* $\omega \ll \nu = \omega_p^2/4\pi\sigma_0$ (σ_0 – статическая проводимость металла) имеем

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\omega_p} \right)^2, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}.$$

Соотношение величин σ_0 и ω при этом может быть произвольным. При $\sigma_0 \ll \omega$ с учетом $\omega \ll \nu$ получается оценка $\sigma_0 \ll \omega_p$ (плохая проводимость). В таком случае

$$k' = \omega/c, \quad k'' = 2\pi\sigma_0/c,$$

и глубина скин-слоя оказывается равной

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sigma_0} \gg \lambda = \frac{2\pi}{k'}.$$

В обратном предельном случае $\sigma_0 \gg \omega$ получим, что $\omega \ll \omega_p$. Данные оценки соответствуют так называемому *квазистационарному приближению*. Следовательно, в этом приближении $\varepsilon' \ll \varepsilon''$ независимо от соотношения между величинами σ_0 и ω_p (в рамках приведенных неравенств), и

$$k' = k'' = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}{c},$$

так что глубина скин-слоя

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}} \sim \lambda.$$

Последняя формула широко используется при решении задач в низкочастотном пределе.

2. Перейдем теперь к *высокочастотному пределу* $\omega \gg \nu = \omega_p^2/4\pi\sigma_0$. У большинства металлов для плазменной частоты

справедлива оценка $\omega_p \gg \nu$, поэтому в высокочастотном пределе важно соотношение между ω и ω_p . В соответствии с общим выражением (2.2) в главном приближении имеем (пренебрегая членами порядка $(\nu/\omega)^2$)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \quad (2.3)$$

При $\omega < \omega_p$

$$k' = 0, \quad k'' = \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}/c,$$

и глубина скин-слоя равна

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}, \quad \lambda = \infty. \quad (2.4)$$

Эта формула, в частности, используется в задаче 4. Если, напротив, $\omega > \omega_p$, то поглощение поля в металле оказывается очень малым. Чтобы найти его, нужно уточнить выражение (2.3) для диэлектрической проницаемости, оставив в нем малую мнимую часть. В силу (2.2)

$$\varepsilon' = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad \varepsilon'' = \frac{\nu\omega_p^2}{\omega^3} \ll 1.$$

Следовательно, для вещественной и мнимой частей волнового числа получим

$$k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}, \quad k'' = \frac{\nu\omega_p^2}{2c\omega\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}},$$

и глубина скин-слоя теперь составляет

$$\delta = \frac{2c\omega\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\nu\omega_p^2}. \quad (2.5)$$

Данное выражение упрощается в предельном случае $\omega \gg \omega_p$:

$$\delta = \frac{2c \omega^2}{\nu \omega_p^2} = \frac{8\pi c \sigma_0 \omega^2}{\omega_p^4} \gg \lambda.$$

При таких частотах диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице, и металл (как, впрочем, и любая другая среда) становится “прозрачным”. У хороших проводников (медь, серебро) прозрачность наступает в области жесткого ультрафиолета ($\lambda \sim 0.01$ мкм).

Формулы (2.4) и (2.5) неприменимы, если частота электромагнитного поля ω близка к плазменной частоте ω_p . Поэтому рассмотрим случай точного равенства $\omega = \omega_p$ (так называемая *критическая плотность плазмы*). Из общего выражения (2.2) в силу оценки $\nu \ll \omega$ находим

$$\varepsilon' = \left(\frac{\nu}{\omega_p}\right)^2 \ll 1; \quad \varepsilon'' = \frac{\nu}{\omega_p} \ll 1. \quad (2.6)$$

Значит, в главном приближении

$$k' = k'' = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_p}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^3}{8\pi\sigma_0}},$$

и глубина скин-слоя равна

$$\delta = c \sqrt{\frac{8\pi\sigma_0}{\omega_p^3}}.$$

Итак, мы исследовали все предельные случаи, которые имеют место в отношении проникновения электромагнитного поля в металл. Обратим внимание на то, что предел $|\varepsilon| \gg 1$, используемый обычно в курсе общей физики для перехода от диэлектрической среды к проводящей, реализуется в квазистационарном приближении ($\omega \ll \nu, \sigma_0$) и в умеренно-высокочастотном приближении ($\nu \ll \omega \ll \omega_p$).⁴⁾

⁴⁾ В частности, предел $|\varepsilon| \gg 1$ соответствует переходу к проводнику в случае стационарного поля с $\omega = 0$.

В заключение выразим магнитное поле H с внутренней стороны поверхности металла через поле падающей из вакуума электромагнитной волны и определим также затухание электрического поля в скин-слое. В падающей волне амплитуды электрического и магнитного полей равны друг другу: $H_0 = E_0$. То же справедливо для отраженной волны ($H_1 = E_1$). Из условия равенства тангенциальных составляющих полей на поверхности раздела двух сред находим

$$H = H_0 + H_1 = E_0 + E_1, \quad E = E_0 - E_1. \quad (2.7)$$

При написании данных выражений мы учли, что как для падающей, так и для отраженной волны выполняется известное геометрическое соотношение $\mathbf{k}/k = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]/E^2$. Для волны в металле (прошедшей волны) согласно уравнениям Максвелла имеем следующую связь между амплитудами электрического и магнитного полей:

$$H = \sqrt{\varepsilon(\omega)}E. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) дают искомые значения напряженности полей в прошедшей волне:

$$H = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}E_0, \quad E = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}}E_0.$$

В частности, если $|\varepsilon| \gg 1$ (что реализуется во многих явлениях с металлами), то $H = 2E_0$; электрическое поле в металле в таком случае в $\sqrt{|\varepsilon|}$ раз меньше магнитного. Из-за этого обстоятельства при решении настоящей задачи мы обсуждали затухание именно магнитного поля. Тем не менее иногда обе компоненты электромагнитного поля в среде сравнимы по величине.

Случай критической плотности плазмы в высокочастотном пределе, когда частота электромагнитного поля близка к плазменной частоте ω_p , представляет собой исключение, так как в нем диэлектрическая проницаемость мала по сравнению с единицей

(см. (2.6)). Следовательно, электрическое поле в металле гораздо больше магнитного, а напряженность электрического поля с внутренней поверхности металла равна удвоенной напряженности электрического поля падающей волны. Объясняется это тем, что при $\omega = \omega_p$ отраженное от металла электрическое поле по фазе совпадает с падающим.

Задача 3. Формула Дебая для частотной дисперсии поляризуемости диэлектрика. Принцип причинности.

Получить формулу Дебая для зависимости диэлектрической проницаемости среды, состоящей из полярных молекул, от частоты внешнего электрического поля. Исходя из формулы Дебая, доказать принцип причинности (поляризация среды обусловлена значениями электрического поля во все предшествующие моменты времени).

Решение. Сначала рассмотрим случай постоянного электрического поля с напряженностью E . Обозначим через p дипольный момент полярной молекулы и через θ угол между вектором дипольного момента и вектором напряженности электрического поля. Электрическая поляризация (дипольный момент единицы объема среды) дается соотношением

$$P = \int p \cos \theta \cdot f(\theta) d\Omega,$$

где $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ – элемент телесного угла, а $f(\theta)$ – нормированная функция распределения молекул по углам, определяемая статистикой Больцмана:

$$f(\theta) = \frac{n}{4\pi} \exp\left(\frac{\mathbf{p}\mathbf{E}}{T}\right) \approx \frac{n}{4\pi} \left(1 + \frac{pE}{T} \cos \theta\right).$$

Произведение $-\mathbf{p}\mathbf{E}$ суть энергия взаимодействия диполя с электрическим полем, n – концентрация молекул, T – температура,

измеряемая в энергетических единицах; электрическое поле подразумевается слабым, так что $pE/T \ll 1$ и экспоненту можно разложить в ряд Тейлора. Отметим, что распределение Больцмана предполагает идеальность газа (для жидкости оно носит лишь качественный характер).

Несложное интегрирование по телесному углу приводит к результату

$$P = \frac{np^2}{3T} E.$$

Соответственно для *статической диэлектрической проницаемости* получим

$$\varepsilon_0 = \frac{E + 4\pi P}{E} = 1 + \frac{4\pi np^2}{3T}. \quad (3.1)$$

Данная формула неплохо работает в разреженных газах, однако в жидкостях она приводит к весьма ощутимой погрешности. К примеру, у воды при комнатной температуре (дипольный момент молекулы $p = 1.855$ Дебай ($1.855 \cdot 10^{-18}$ CGSE)) формула (3.1) дает значение $\varepsilon_0 = 13$, в эксперименте же $\varepsilon_0 = 81$. Тем не менее рассматриваемая ниже задача о частотной дисперсии диэлектрической проницаемости среды, состоящей из полярных молекул, сохраняет смысл и для жидкости; нужно лишь в качестве статической проницаемости, которая войдет в ответ, взять ее экспериментальное значение.

Теперь обратимся к случаю переменного монохроматического поля $E(t) = E_0 \exp(-i\omega t)$. Новую функцию распределения молекул по углам обозначим посредством $f(\theta, t)$. Будем искать ее в том же виде, что и для постоянного поля:

$$f(\theta, t) = \frac{n}{4\pi} \left(1 + \beta(\omega) \frac{pE_0 \exp(-i\omega t)}{T} \cos \theta \right).$$

Здесь введена неизвестная пока функция частоты $\beta(\omega)$, характеризующая релаксацию вращательного движения молекул под влиянием температуры; ⁵⁾ очевидно, что $\beta(0) = 1$. Чтобы найти

⁵⁾ Введение множителя $\beta(\omega)$ не влияет на нормировку функции $f(\theta, t)$.

значения $\beta(\omega)$ во всем диапазоне частот, требуется вывести уравнение для функции распределения $f(\theta, t)$.

Представим молекулы шариками с эффективным радиусом a , взвешенными в собственной жидкости с коэффициентом динамической вязкости η . Под влиянием электрического поля полярная молекула начинает поворачиваться. При этом на нее действует момент сил вязкого трения L , пропорциональный угловой скорости поворота $\dot{\theta}$. Его величина определяется известным выражением, аналогичным силе Стокса для поступательного движения шарика в вязкой жидкости (см. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 99*):

$$L = -8\pi\eta a^3 \dot{\theta}. \quad (3.2)$$

В отсутствие электрического поля затухание вращения описывается уравнением

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -8\pi\eta a^3 \frac{d\theta}{dt},$$

здесь $J = (2/5)ma^2$ – момент инерции однородного по объему шарика, а $m = \rho(4\pi a^3/3)$ – его масса. Таким образом, характерное время инерционного затухания равно

$$\tau_i = \frac{J}{8\pi\eta a^3} = \frac{m}{20\pi\eta a} = \frac{a^2}{15\nu}.$$

Кинематическая вязкость воды ν составляет $0.01 \text{ см}^2/\text{с}$. Полагая радиус молекулы воды равным $a = 10^{-8} \text{ см}$, получим для времени инерционного затухания значение $\tau_i = 7 \cdot 10^{-16} \text{ с}$.

Теперь рассмотрим “диффузию” вращательного движения шарика в собственной вязкой жидкости, пренебрегая его моментом инерции. ⁶⁾ Подвижность шарика b относительно вращения вводится следующим образом: под действием силы F , направленной

⁶⁾Ниже мы увидим, что инертность молекул дает пренебрежимо малый вклад в релаксацию вращательного движения по сравнению с вязкими силами.

по касательной к его поверхности, последняя приобретает тангенциальную скорость $v = bF$. Полагая на поверхности шарика $v = a\dot{\theta}$ и $L = Fa$, находим связь угловой скорости с приложенным моментом силы: $\dot{\theta} = (b/a^2)L$. Сравнивая данную формулу с (3.2), приходим к выражению для вращательной подвижности шарика:

$$b = -\frac{1}{8\pi\eta a}.$$

Согласно соотношению Эйнштейна, коэффициент вращательной диффузии равен

$$D = |b|T = \frac{T}{8\pi\eta a}.$$

Из всех этих рассуждений можно сделать вывод, что в рамках рассматриваемой модели уравнение для функции распределения $f(\theta, t)$, учитывающей диссипацию вращательного движения шарика под действием вязких сил (посредством множителя $\beta(\omega)$), суть обычное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta(f - f_0). \quad (3.3)$$

Оператор Лапласа в нем, очевидно, содержит только угловую часть:

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right\},$$

а величина

$$f_0(\theta, t) = \frac{n}{4\pi} \left(1 + \frac{pE_0 \cos\theta \exp(-i\omega t)}{T} \right)$$

есть функция распределения без учета диссипации. В статическом пределе f совпадает с f_0 , и обе части уравнения (3.3) равны нулю, как и должно быть.

Время релаксации диффузии, исходя из свойств уравнения (3.3), есть

$$\tau = \frac{a^2}{2D} = \frac{4\pi\eta a^3}{T}.$$

При температуре 300 К оно составляет $3 \cdot 10^{-12}$ с, что на три-четыре порядка больше τ_i . Следовательно, инертностью молекул действительно можно пренебречь по сравнению с вязкими силами с точки зрения релаксации их вращательного движения. Подставляя явные выражения для функций распределения f и f_0 в уравнение (3.3) и производя необходимые сокращения, получим

$$-i\omega\beta(\omega) = \frac{1}{2\tau} (-2\beta(\omega) + 2) .$$

Отсюда находим окончательно, что

$$\beta(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega\tau} .$$

Усреднение направлений дипольных моментов ($\cos\theta$) с функцией распределения $f(\theta, t)$ дает значение поляризации:

$$P = \beta(\omega) \frac{np^2}{3T} E . \quad (3.4)$$

Таким образом, функция $\beta(\omega)$ представляет собой частотную поправку к статической диэлектрической восприимчивости среды. Зависимость диэлектрической проницаемости газа или жидкости, состоящих из полярных молекул, от частоты приложенного электрического поля определяется соотношением

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{(4\pi np^2/3T)}{1 - i\omega\tau} , \quad (3.5)$$

которое и называется *формулой Дебая*. Его структура напоминает формулу (1.5) для частотной дисперсии проводимости среды. В соответствии с (3.5) абсолютная величина $\varepsilon(\omega)$ убывает с частотой. Так, в высокочастотном пределе $\omega\tau \gg 1$ из (3.5) получается выражение, не зависящее от температуры:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{np^2}{3\omega\eta a^3} .$$

Присутствие мнимой части в диэлектрической проницаемости обуславливает наличие поглощения энергии переменного электрического поля в среде.

Результат решения данной задачи можно обобщить на случай произвольного закона изменения внешнего электрического поля со временем. Представляя функции $E(t)$ и $P(t)$ интегралами Фурье по всему частотному спектру,

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int P(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

по аналогии с (3.4) получим уравнение для фурье-образов (спектральных плотностей):

$$P(\omega) = \alpha(\omega)E(\omega). \quad (3.6)$$

Здесь мы ввели *диэлектрическую восприимчивость* среды на частоте ω , которая в модели Дебая определяется соотношением

$$\alpha(\omega) = \beta(\omega) \frac{np^2}{3T} = \frac{1}{(1 - i\omega\tau)} \frac{np^2}{3T}. \quad (3.7)$$

Применим к (3.6) обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) E(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega') \alpha(\omega') d\omega' \right\} E(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Так как

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(\omega - \omega')t'\} dt',$$

то

$$P(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \alpha(\omega') \exp(-i\omega't') \times \\ \times E(\omega) \exp\{-i\omega(t-t')\} d\omega' d\omega dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t') E(t-t') dt',$$

где функция $\alpha(t)$ есть обратное преобразование Фурье от восприимчивости $\alpha(\omega)$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.8)$$

Интеграл по вещественной оси может быть заменен интегралом вдоль замкнутого контура γ_ω в плоскости комплексного ω , состоящего из вещественной оси и дуги бесконечного радиуса с центром в начале координат. Последняя проходит в нижней полуплоскости, когда $t \geq 0$, и в верхней полуплоскости, когда $t < 0$, что продиктовано условием сходимости интеграла (3.8) (рис. 2). Поскольку функция $\alpha(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = -i/\tau$, лежащей

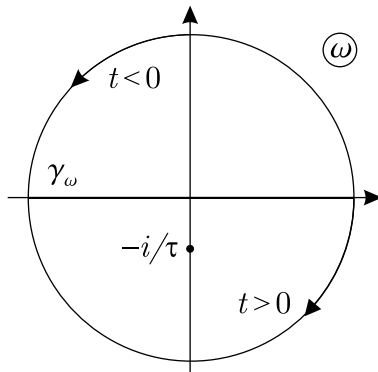


Рис. 2

в нижней полуплоскости, в первом случае интеграл отличен от нуля и равен вычету от подынтегральной функции в данном полюсе, а во втором случае равен нулю (т.к. подынтегральная функция регулярна в верхней полуплоскости при $t < 0$). В результате

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \alpha(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

и выражение для поляризации приобретает следующий вид:

$$P(t) = \int_0^\infty \alpha(t') E(t - t') dt'. \quad (3.9)$$

Таким образом, поляризация среды в момент времени t обусловлена величиной электрического поля во все предшествующие моменты, что составляет так называемый *принцип причинности*.

Вычисляя контурный интеграл (3.8) с учетом (3.7), получим явное представление для релаксационной функции $\alpha(t)$, соответствующей модели Дебая:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{\tau} \exp\{-t/\tau\}, \quad t \geq 0,$$

где $\alpha_0 = np^2/3T$ есть статическая диэлектрическая восприимчивость. Пусть, к примеру, электрическое поле резко включается в момент $t = 0$. В этом случае $E(t)$ суть ступенчатая функция:

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_*, & t \geq 0. \end{cases}$$

Тогда при $t < 0$ поляризация у среды, очевидно, отсутствует, а при $t \geq 0$ в силу (3.9) равна

$$P(t) = E_* \int_0^t \alpha(t') dt' = \alpha_0 E_* [1 - \exp(-t/\tau)],$$

т.е. имеет место стандартный процесс установления. При $t \gg \tau$ поляризация среды выходит на постоянное значение $\alpha_0 E_*$.

Принцип причинности следует также из формулы Друде (1.5) для частотной зависимости проводимости проводника (см. задачу 1). Закон Ома, связывающий линейным образом плотность тока с электрическим полем в проводнике, в случае немонохроматических полей справедлив лишь для их фурье-компонент:

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega).$$

Обратное преобразование Фурье дает уже знакомую нам общую связь временных функций $\mathbf{j}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$: ⁷⁾

$$\mathbf{j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-t')\mathbf{E}(t')dt',$$

где

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \sigma(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Контур интегрирования γ_ω , как и раньше, замыкается в нижней полуплоскости комплексного ω , когда $t \geq 0$, и в верхней полуплоскости, когда $t < 0$ (рис. 2). Функция $\sigma(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = -i/\tau$ (см. (1.5)), правда время релаксации τ в данном примере есть время свободного пробега электрона в проводнике. С учетом сделанных выше замечаний получим

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\tau} \exp(-t/\tau), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где σ_0 суть статическая проводимость металла. В результате приходим к тому же принципу причинности, только теперь для плот-

⁷⁾ Обратное преобразование Фурье от произведения двух функций всегда эквивалентно их свертке в исходном (временном) представлении.

ности тока:

$$\mathbf{j}(t) = \frac{\sigma_0}{\tau} \int_0^{\infty} \exp(-t'/\tau) \mathbf{E}(t-t') dt'.$$

К примеру, если электрическое поле постоянно, то из этого соотношения вытекает статический закон Ома $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$. Рекомендуем вам самостоятельно найти плотность тока, создаваемую монохроматическим полем $E(t) = E_0 \exp(-i\omega t)$ в высокочастотном пределе $\omega\tau \gg 1$, а также ток от импульсного воздействия $E(t) = E_0 \delta(t)$.

В заключение отметим, что принцип причинности обычно рассматривается как исходный фундаментальный постулат, а не как следствие конкретных физических моделей (формул Дебая, Друде и т.д.). При таком подходе можно доказать, что вне зависимости от электродинамических свойств среды вещественная и мнимая части ее диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ всегда связаны между собой формулами, называемыми *дисперсионными соотношениями Крамерса–Кронига*:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \varepsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{aligned} \quad 8)$$

Попробуйте самостоятельно вывести их из принципа причинности (используя его математическую формулировку (3.9)). Полезно также проверить, что вещественная и мнимая части диэлектрической проницаемости в рамках моделей Дебая и Друде удовлетворяют соотношениям Крамерса–Кронига.

⁸⁾Символом PV обозначено главное значение интеграла с особенностью.

Глава 2

Рассеяние солнечного света в атмосфере

Задача 4. Рассеяние солнечного света на малых металлических пылинках.

Определить сечение рассеяния солнечного света на малых металлических пылинках в атмосфере. Считать пылинки сферическими частицами с размерами, малыми по сравнению с длиной волны падающего света, но в то же время большими по сравнению с характерной толщиной скин-слоя.

Решение. Физически очевидно, что мощность рассеиваемого пылинкой света пропорциональна интенсивности (плотности потока энергии) падающей на нее световой волны. Коэффициент пропорциональности и называется *сечением рассеяния*; он характеризует “эффективность” переизлучения света пылинкой. Помимо определенного выше полного сечения рассеяния обычно вводят в рассмотрение также *дифференциальное сечение рассеяния*, которое учитывает распределение рассеиваемой мощности по телесному углу. Переизлучение света происходит за счет переменного дипольного момента пылинки (электрического и магнитного), индуцируемого полем падающей волны.

1. Обсудим сначала возможность проникновения света в металлическую пылинку радиусом a . Здесь мы еще раз повторим рассуждения, проведенные в задаче 2. Будем считать, что вся поляризация пылинки создается свободными электронами металла, тем самым пренебрегая вкладом связанных электронов. В известной модели Друде диэлектрическая проницаемость проводника ϵ

имеет следующую структуру (см. задачу 1):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}.$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m}$ – плазменная частота, n_e – концентрация свободных электронов в металле, m и e – масса и заряд электрона, ω – частота света, ν – частота столкновений электронов с фононами кристаллической решетки (основной механизм релаксации при не слишком низких температурах). Последняя может быть выражена через статическую удельную проводимость металла σ_0 по формуле Друде (см. задачу 1):

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{4\pi\sigma_0}. \quad (4.1)$$

Подставляя это соотношение в предыдущее, получим общую формулу для диэлектрической проницаемости металла, которая содержит измеряемые экспериментально величины σ_0 и ω_p :

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi\sigma_0\omega_p^2}{\omega(4\pi\sigma_0\omega + i\omega_p^2)}. \quad (4.2)$$

Упростим данное выражение, взяв в качестве типичного примера медную пылинку, облучаемую зеленым светом с длиной волны $\lambda = 0.5$ мкм (частота света $\omega = 2\pi c/\lambda = 3.8 \cdot 10^{15}$ 1/с). Концентрация свободных электронов в меди $n_e = 8.5 \cdot 10^{22}$ см⁻³. Соответственно плазменная частота равна $\omega_p = 1.65 \cdot 10^{16}$ 1/с. Статическая удельная проводимость меди при комнатной температуре составляет $\sigma_0 = 5.3 \cdot 10^{17}$ 1/с, она обратно пропорциональна абсолютной температуре и в верхних слоях атмосферы не слишком сильно отличается от данного значения. В результате отношение $\omega_p^2/4\pi\sigma_0\omega = 0.011$, и вторым слагаемым в знаменателе (4.2), отвечающим за столкновение электронов с фононами, можно прене-

бречь.⁹⁾ Это приводит к оценке

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

характерной для бесстолкновительной плазмы. А так как в рассматриваемом примере $\omega \ll \omega_p$, то можно также пренебречь и единицей по сравнению со слагаемым $(\omega_p/\omega)^2$. Следовательно, для показателя преломления меди окончательно получим

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon} \approx i \frac{\omega_p}{\omega}, \quad |n| \gg 1. \quad (4.3)$$

Электромагнитная волна проникает в металл лишь на небольшую глубину, называемую *скин-слоем*. Оценим его толщину. Зависимость напряженности электрического поля в волне от времени и координаты x , отсчитываемой вглубь металла, в соответствии с выражением (4.3) для показателя преломления имеет вид

$$\begin{aligned} E(t, x) &= E_0 \exp(ikx - i\omega t) = E_0 \exp\left(i \frac{\omega n}{c} x - i\omega t\right) \approx \\ &\approx E_0 \exp\left(-\frac{\omega_p}{c} x - i\omega t\right). \end{aligned}$$

Таким образом, глубина скин-слоя в металлической пылинке (определяемая как расстояние, на котором напряженность поля убывает в e раз) есть

$$\delta = \frac{c}{|n|\omega} \approx \frac{c}{\omega_p} \ll a. \quad (4.4)$$

В приведенном выше примере δ составляет 0.018 мкм, и указанное неравенство справедливо для пыли субмикронных размеров ($a \sim 0.1$ мкм), в отношении которой все еще выполняется условие $a \ll \lambda$. Заметим, что затухание поля вглубь пылинки в данном

⁹⁾ Ограничение $(\omega_p^2/4\pi\sigma_0\omega) \ll 1$ соответствует высокочастотному пределу $\omega \gg \nu$, см. задачу 2.

случае является аperiодическим, поскольку вещественная часть волнового числа в главном приближении равна нулю.

Обратим также внимание на еще одно важное обстоятельство. Несмотря на то, что в нашем случае $\omega \ll \sigma_0$, данного ограничения тем не менее оказывается недостаточно для реализации квазистационарного приближения. В самом деле, для частоты столкновений электронов с фононами в силу (4.1) получим значение $\nu = 4.2 \cdot 10^{13}$ 1/с; значит, для видимого света $\omega \gg \nu$. Применимость квазистационарного приближения требует выполнения более жесткого, нежели $\omega \ll \sigma_0$, условия (см. задачу 2)

$$\omega \ll \nu = \frac{\omega_p^2}{4\pi\sigma_0}. \quad 10)$$

Оно не реализуется для световых частот, при которых справедливо обратное – высокочастотное приближение $\omega \gg \nu$.

2. Вычислим электрический дипольный момент \mathbf{p} , приобретаемый пылинкой под действием электрического поля световой волны с напряженностью

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) \quad (4.5)$$

вдали от нее. Здесь ω – частота падающей волны, предполагаемой линейно поляризованной, \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения относительно пылинки. В приближении $a \ll \lambda = 2\pi/k$ (a – радиус пылинки, λ – длина волны света) для скалярного потенциала φ во внешнем (по отношению к пылинке) пространстве нужно решать статическое уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Действительно, временным слагаемым $c^{-2}(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ в общем уравнении

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

можно пренебречь, так как $\Delta\varphi \sim \varphi/a^2$, а $c^{-2}(\partial^2\varphi/\partial t^2) \sim \varphi/\lambda^2$. Если, кроме всего прочего, для электронов в металле выполнено

¹⁰⁾ Предел $\omega \ll \nu$, по сути дела, означает применимость статического закона Ома.

условие $c/\omega_p \ll a$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$ – их плазменная частота, то в силу приведенных выше рассуждений (см. оценку (4.4)) электрическое поле проникает внутрь пылинки только на малую толщину скин-слоя $\delta \sim c/\omega_p$. В самом скин-слое справедливо общее волновое уравнение (записанное, разумеется, для металла), поскольку оба его слагаемых имеют одинаковый порядок.¹¹⁾ Однако с точки зрения внешней задачи ($r > a$), к которой относится исследуемое рассеяние света, наличие тонкого скин-слоя несущественно; в рамках требуемой точности можно считать, что вся поляризация пылинки сосредоточена лишь на ее поверхности (в бесконечно тонком слое), и электрическое поле не проникает внутрь.

Отсутствие электрического поля внутри частицы позволяет положить в ней потенциал φ постоянным и равным нулю. Вне частицы, т.е. при $r > a$ (r – радиальная координата), решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \right) E \cos \theta; \quad (4.6)$$

угол θ сферической системы координат отсчитывается от направления поляризации внешнего электрического поля. Только такое решение обращается в нуль на поверхности пылинки ($r = a$), обеспечивая непрерывность потенциала, и удовлетворяет условию $\nabla\varphi \rightarrow -\mathbf{E}$ при $r \rightarrow \infty$. Вспомним, что потенциал поля электрического диполя есть

$$\varphi_p = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} \equiv \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.7) со вторым слагаемым в (4.6), ответственным за поляризацию частицы, получим выражение для индуцированного

¹¹⁾Рекомендуем вам самостоятельно произвести соответствующие оценки. Отметим также, что можно рассуждать в обратном направлении. А именно, из предположения о невырожденности волнового уравнения в небольшой области вблизи поверхности частицы нетрудно получить оценку для толщины скин-слоя.

электрического дипольного момента:

$$\mathbf{p} = a^3 \mathbf{E}. \quad (4.8)$$

В дальнейшем будет удобнее пользоваться не скалярным, а векторным потенциалом поля. Оба потенциала связаны условием Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

которое позволяет выразить один потенциал через другой. В нашем случае векторный потенциал поля, создаваемого электрической поляризацией пылинки, равен (в волновой зоне, $r \gg \lambda$)¹²⁾

$$\mathbf{A}_p = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} = -\frac{i\omega a^3}{cr} \mathbf{E}. \quad (4.9)$$

Это легко проверить непосредственной подстановкой решения (4.9) в условие Лоренца (с учетом представления (4.5) для электрического поля).

3. Вычислим теперь магнитный дипольный момент \mathbf{m} пылинки, индуцированный магнитным полем световой волны с напряженностью $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. В сформулированных выше условиях большой проводимости мы близки к сверхпроводящему состоянию вещества ($\sigma_0 \rightarrow \infty$). Важное свойство сверхпроводника заключается в том, что внутри него магнитная индукция $\mathbf{B}_{in} = 0$ всегда равна нулю (тогда как напряженность магнитного поля \mathbf{H}_{in} отлична от нуля). Действительно, при включении магнитного поля в сверхпроводнике возникнут индукционные токи, создающие дополнительную индукцию, которая в соответствии с законом Ленца будет полностью компенсировать внешнюю индукцию. В обычном проводнике с конечной проводимостью компенсирующие индукционные токи быстро затухают, и внешнее поле проникает внутрь. В сверхпроводнике же линии результирующей

¹²⁾ Приближение волновой зоны ($r \gg \lambda$) позволяет пренебречь слагаемым $1/r$ по сравнению со слагаемым $1/\lambda$ при взятии оператора div .

индукции выталкиваются наружу и огибают сверхпроводящее тело. Так как $\mathbf{V}_{in} = \mu \mathbf{H}_{in} = 0$, а $\mathbf{H}_{in} \neq 0$, то можно сказать, что сверхпроводящая пылинка формально обладает магнитной проницаемостью $\mu = 0$. Вектор магнитной индукции на наружной поверхности пылинки параллелен ей в каждой точке, что следует из граничного условия для нормальной компоненты индукции.

Конечно, все эти соображения не относятся к тонкому скин-слою вблизи поверхности пылинки, где магнитная индукция экспоненциально убывает от некоторого ненулевого значения на поверхности до нуля. В данной области магнитная проницаемость μ также экспоненциально убывает вместе с индукцией в силу постоянства \mathbf{H}_{in} . Учет скин-слоя, однако, влияет лишь на поглощение света, но не на его рассеяние (см. задачу 5). Как и в случае с электрической поляризацией (см. пункт 2 данной задачи), магнитным скин-слоем в рассматриваемом приближении ($c/\omega_p \ll a$) можно пренебречь. Подчеркнем, что к сверхпроводнику неприменимы уравнения (2.1), дающие экспоненциальное затухание напряженности магнитного поля \mathbf{H} вглубь металла. Переход к сверхпроводнику есть *искусственный* прием, который тем не менее позволяет получить качественно правильные результаты для магнитной части рассеяния.

Вне пылинки при условии $a \ll \lambda$ имеет место магнитостатическая задача, поскольку временные слагаемые в общих уравнениях Максвелла малы в сравнении с пространственными (см. оценки в пункте 2 данной задачи). Определим напряженность магнитного поля \mathbf{H}_{in} внутри пылинки, исходя из аналогии между уравнениями магнитостатики и электростатики. При наложении внешнего постоянного электрического поля с напряженностью \mathbf{E} на сферическую частицу с диэлектрической проницаемостью ε электрическое поле внутри частицы является однородным, и его напряженность

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{2 + \varepsilon} \mathbf{E}$$

(см. задачу 6). При наложении внешнего постоянного магнитно-

го поля с напряженностью \mathbf{H} магнитное поле внутри сферической частицы с магнитной проницаемостью μ имеет аналогичную структуру:

$$\mathbf{H}_{in} = \frac{3}{2 + \mu} \mathbf{H} = \frac{3}{2} \mathbf{H}.$$

Здесь мы использовали значение $\mu = 0$, применимое к сверхпроводнику. Еще раз подчеркнем, что эти же соотношения сохраняют силу и для переменных монохроматических полей, если пренебречь временным членом в уравнениях Максвелла (это можно делать, когда длина волны внешнего поля велика по сравнению с размерами частицы).

Намагниченность пылинки (магнитный момент единицы объема) равна

$$\mathbf{M}_{in} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_{in} - \mathbf{H}_{in}) = -\frac{3}{8\pi} \mathbf{H}.$$

Следовательно, магнитный дипольный момент \mathbf{m} сферической сверхпроводящей частицы составляет

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} a^3 \mathbf{H}. \quad (4.10)$$

Векторный потенциал, создаваемый магнитной поляризацией частицы в волновой зоне $r \gg \lambda$, дается соотношением

$$\mathbf{A}_m = \frac{[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}]}{cr}, \quad (4.11)$$

которое получается по аналогии с формулой (4.9) для электрической поляризации, здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный от пылинки к точке наблюдения. Подставляя (4.10) в (4.11), получим окончательное выражение для магнитной компоненты потенциала индуцируемого поля:

$$\mathbf{A}_m = \frac{i\omega a^3}{2cr} [\mathbf{H}, \mathbf{n}]. \quad (4.12)$$

4. Объединим полученные выше результаты для электрической и магнитной поляризации пылинки. Согласно (4.9) и (4.12) суммарный векторный потенциал \mathbf{A}_i , индуцируемый полем световой волны посредством поляризации частицы, равен

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_m = -\frac{i\omega a^3}{cr} \left\{ \mathbf{E} - \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{n}] \right\}$$

(\mathbf{n} – единичный вектор от частицы к точке наблюдения). Напомним, что в падающей волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны уравнением

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}_0],$$

где \mathbf{n}_0 – единичный вектор в направлении распространения световой волны.

Напряженность магнитного поля, соответствующая рассеянной волне, в силу определения векторного потенциала есть $\mathbf{H}_i = \text{rot}\mathbf{A}_i$. Отсюда нетрудно заключить, что в волновой зоне ($r \gg \lambda$) она в главном приближении определяется формулой

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}_i, \mathbf{n}].^{13)}$$

Из последних трех соотношений, с учетом монохроматической зависимости полей от времени, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= -\frac{\omega^2 a^3}{c^2 r} \left\{ [[\mathbf{H}, \mathbf{n}_0], \mathbf{n}] - \frac{1}{2} [[\mathbf{H}, \mathbf{n}], \mathbf{n}] \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{\omega^2 a^3}{c^2 r} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}) - \mathbf{n}_0(\mathbf{H}, \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{H}, \mathbf{n}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Введем углы, показанные на рис. 3. Угол ϑ характеризует направление рассеяния световой волны относительно направления

¹³⁾Мы не даем вывод этой формулы, поскольку его полезно провести самостоятельно. Для вывода необходимо предположить, что $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \sim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)/r$.

падающей волны. Поскольку $\cos \theta = \sin \vartheta \cos \varphi$, выражение (4.13) преобразуется к виду

$$\mathbf{H}_i = \frac{\omega^2 a^3}{c^2 r} \left\{ \mathbf{H} \left(\cos \vartheta - \frac{1}{2} \right) + H \cos \theta \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} - \mathbf{n}_0 \right) \right\}.$$

Для вычисления потока энергии (вектора Пойнтинга) рассеянно-

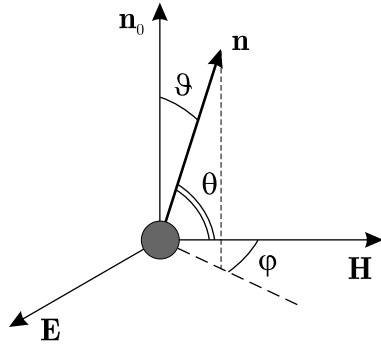


Рис. 3

го излучения нам понадобится $|\mathbf{H}_i|^2$. После элементарных преобразований получим, что

$$|\mathbf{H}_i|^2 = \frac{\omega^4 a^6 H_0^2}{c^4 r^2} \left\{ \cos^2 \vartheta - \cos \vartheta + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right\}.$$

5. Теперь у нас есть все, чтобы вычислить полное сечение рассеяния света на металлических частицах. Средняя по времени интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ равна

$$dI = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{H}_i|^2 r^2 d\Omega.$$

Интегрирование по углу φ соответствует переходу к *неполяризованному солнечному свету* (при фиксированной точке наблюде-

ния). Для такого света имеем

$$\begin{aligned} \langle dI \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dI(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\omega^4 a^6 H_0^2}{4c^3} \left\{ \cos^2 \vartheta - \cos \vartheta + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sin^2 \vartheta \right\} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Деля это выражение на среднюю плотность потока падающей энергии $cH_0^2/8\pi$, получим дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного света:

$$d\sigma_p = \frac{2\pi\omega^4 a^6}{c^4} \left\{ \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cos^2 \vartheta - \cos \vartheta \right\} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (4.14)$$

Наконец, интегрирование по углу ϑ дает искомое полное сечение рассеяния солнечного света на металлических частицах:

$$\sigma_p = \frac{10\pi\omega^4 a^6}{3c^4} \equiv \frac{10}{3} \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \pi a^2. \quad (4.15)$$

Отметим, что согласно (4.14) дифференциальное сечение рассеяния назад ($\vartheta = \pi$) в 9 раз превышает сечение рассеяния вперед ($\vartheta = 0$). Кроме того, сечение рассеяния пропорционально четвертой степени частоты падающего света ω и квадрату объема частицы (a^3), их предельные значения в рамках рассмотренной модели ограничены неравенством $\omega a \ll c$ (т.е. $a \ll \lambda$). В результате эффективное сечение рассеяния мало по сравнению с геометрическим сечением пылинки πa^2 – она является практически “прозрачной” для световой волны. Наличие множителя ω^4 в (4.15) свидетельствует о том, что фиолетовый свет рассеивается на металлической пыли более чем в 10 раз лучше красного. Обратим также внимание на отсутствие в выражении (4.15) статической проводимости металла σ_0 и плазменной частоты электронов ω_p . Это является следствием оценок $c/\omega_p \ll a$ и $\omega_p^2 \ll \sigma_0 \omega$, при которых можно пренебречь наличием скин-слоя (см. рассуждения в пункте 1).

Еще раз подчеркнем, что полученные результаты применимы, только если размер металлической пылинки a существенно превышает глубину проникновения внешнего поля в металл, которая равна c/ω_p . Таким образом, формула (4.15) справедлива в условиях

$$c/\omega_p \ll a \ll c/\omega,$$

соответствующих металлической пыли субмикронных размеров ($a \sim 0.1$ мкм).

Задача 5. Поглощение солнечного света малыми металлическими пылинками.

В условиях предыдущей задачи определить сечение поглощения солнечного света на малой металлической пылинке.

Решение. Поглощение света пылинкой, как и рассмотренное в предыдущей задаче рассеяние света, пропорционально интенсивности падающей волны. Коэффициент пропорциональности и есть искомое *сечение поглощения*.

Свет поглощается в тонком скин-слое вблизи поверхности пылинки, который имеет ненулевую толщину из-за конечности проводимости металла. В предыдущей задаче мы могли пренебречь скин-слоем, однако теперь его присутствие является существенным. В общем случае поглощение происходит из-за изменения как электрического, так и магнитного поля внутри частицы. Исследуем сначала вклад от магнитного поля. Мощность, поглощаемая в единице объема сплошной среды, дается известным соотношением электродинамики:

$$W = -\mathbf{M}_{in} \frac{d\mathbf{B}_{in}}{dt}. \quad (5.1)$$

Здесь \mathbf{B}_{in} – индукция магнитного поля в скин-слое, а \mathbf{M}_{in} – магнитный момент единицы объема металлической пылинки.¹⁴⁾ При

¹⁴⁾Еще раз подчеркнем, что в предыдущей задаче мы пренебрегали ролью скин-слоя и полагали индукцию магнитного поля равной нулю внутри всей пылинки.

решении предыдущей задачи мы получили, что

$$\mathbf{M}_{in} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_{in},$$

где \mathbf{H}_{in} – напряженность магнитного поля внутри пылинки. В отличие от индукции \mathbf{V}_{in} , которая экспоненциально затухает на глубине порядка толщины скин-слоя, величина \mathbf{H}_{in} (а следовательно, и \mathbf{M}_{in}) одинакова во всем пространстве внутри пылинки (см. предыдущую задачу) и связана с напряженностью поля \mathbf{H} в падающей волне следующим образом:

$$\mathbf{H}_{in} = \frac{3}{2}\mathbf{H}.$$

Предполагая, как обычно, что падающая волна является монохроматической, т.е. $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t)$, найдем выражение для индуцированной намагниченности пылинки:

$$\mathbf{M}_{in} = -\frac{3}{8\pi}\mathbf{H}_0 \cos(\omega t). \quad (5.2)$$

Теперь определим величину индукции \mathbf{V}_{in} в скин-слое. Будем отсчитывать координату ξ , нормальную к поверхности пылинки в каждой ее точке, вглубь металла; $\xi = 0$ на поверхности. Вектор $\mathbf{V}_{in}(\xi = 0)$ всюду параллелен поверхности и в силу граничного условия для тангенциальной компоненты напряженности поля (с учетом значения $\mu = 1$ для вакуума) равен по модулю

$$B_{in}(0) = H_{in} \sin \theta,$$

где θ – угол сферической системы координат с осью вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 (см. рис. 4). Итак,

$$B_{in}(0) = \frac{3}{2}H_0 \cos(\omega t) \sin \theta. \quad (5.3)$$

Из (5.1), (5.2) и (5.3) получаем выражение для поглощаемой на поверхности мощности:

$$W(0) = -\frac{9\omega}{16\pi}H_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin^2 \theta. \quad (5.4)$$

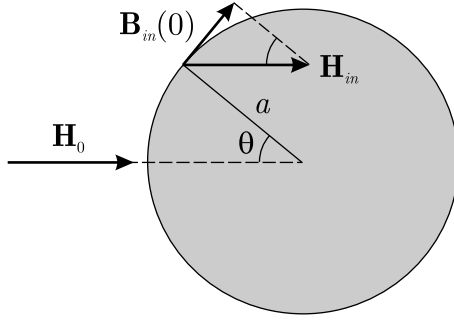


Рис. 4

Дополнительный множитель $\sin \theta$ возникает от скалярного произведения векторов в (5.1) (см. рис. 4).

Вычислим теперь $B_{in}(\xi)$ и соответственно $W(\xi)$ по всей толщине скин-слоя ($\xi \geq 0$). Согласно решению предыдущей задачи, диэлектрическая проницаемость среды (в рамках модели Друде) равна

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\nu \frac{\omega_p^2}{\omega^3}. \quad (5.5)$$

Здесь $\nu \ll \omega$ – частота столкновений электронов металла с фононами кристаллической решетки (она определяется соотношением $\nu = \omega_p^2/4\pi\sigma_0$, где ω_p – плазменная частота, а σ_0 – статическая проводимость металла). Поскольку $\omega \ll \omega_p$ (см. предыдущую задачу, пункт 1), единицей в вещественной части (5.5) можно пренебречь по сравнению с $(\omega_p/\omega)^2$. Для волнового числа k в пределах скин-слоя, таким образом, получим

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{c}{\omega} \approx \frac{1}{i\sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - i\nu\omega_p^2/\omega^3}} \frac{c}{\omega} \approx -\frac{ci}{\omega_p} \left(1 + i\frac{\nu}{2\omega}\right).$$

Следовательно, индукция магнитного поля экспоненциально за-

тухает вглубь пылинки:

$$\begin{aligned} B_{in}(\xi) &\sim \operatorname{Re}[\exp(ik\xi - i\omega t)] = \\ &= \exp(-\xi/\delta) \cos(\gamma\xi/\delta - \omega t), \quad \xi \geq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь $\delta = c/\omega_p$ — характерная глубина скин-слоя, а безразмерный параметр $\gamma = \nu/2\omega \ll 1$. Сравнивая (5.3) и (5.6), находим

$$B_{in}(\xi) = \frac{3}{2} H_0 \exp(-\xi/\delta) \cos(\omega t - \gamma\xi/\delta) \sin \theta.$$

В соответствии с (5.4) можно записать общее решение для функции $W(\xi)$:

$$W(\xi) = -\frac{9\omega}{16\pi} H_0^2 e^{-\xi/\delta} \sin(\omega t - \gamma\xi/\delta) \cos(\omega t) \sin^2 \theta.$$

Усредняя это выражение по периоду светового поля и учитывая, что $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$, получим

$$\langle W(\xi) \rangle = \frac{9\omega}{32\pi} H_0^2 e^{-\xi/\delta} \sin^2 \theta \sin(\gamma\xi/\delta). \quad (5.7)$$

Осталось проинтегрировать (5.7) по ξ , чтобы найти поглощаемую мощность w , отнесенную к единице поверхности пылинки. Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\xi/\delta} \sin(\gamma\xi/\delta) d\xi &= \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(1-i\gamma)}{\delta} \xi\right) d\xi = \\ &= \operatorname{Im} \frac{\delta}{1-i\gamma} \approx \gamma\delta, \end{aligned}$$

то

$$w = \frac{9\omega\gamma\delta}{32\pi} H_0^2 \sin^2 \theta = \frac{9\omega_p c}{256\pi^2 \sigma_0} H_0^2 \sin^2 \theta.$$

Заметим, что w не зависит от частоты ω падающей волны; это справедливо только для частот, удовлетворяющих ограничению

$\nu \ll \omega \ll \omega_p$.¹⁵⁾ Полная мощность Q , поглощаемая пылинкой, равна интегралу от w по всей ее поверхности:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\pi w(\theta) \cdot 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{9\omega_p c a^2}{128\pi\sigma_0} H_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{3\omega_p c a^2}{32\pi\sigma_0} H_0^2 . \end{aligned}$$

Вклад магнитной компоненты поля в сечение поглощения найдем, разделив эту мощность на среднюю плотность потока падающей световой энергии $cH_0^2/8\pi$:

$$\sigma_{\text{II}} = \frac{3\omega_p}{4\sigma_0} a^2 . \quad (5.8)$$

В силу оценок, сделанных в предыдущей задаче для меди, $\omega_p \ll \sigma_0$, и сечение поглощения мало по сравнению с геометрическим сечением пылинки πa^2 . В рассматриваемом приближении $c/\omega_p \ll a \ll c/\omega$ оно не зависит от частоты света.

Электрическая часть поглощаемой мощности в единице объема дается законом Джоуля–Ленца:

$$W = -\mathbf{P}_{in} \frac{d\mathbf{E}_{in}}{dt} . \quad (5.9)$$

Здесь \mathbf{E}_{in} – напряженность электрического поля в скин-слое, а \mathbf{P}_{in} – поляризация (дипольный момент единицы объема пылинки). Согласно соотношению (4.8) предыдущей задачи для электрической поляризации справедлива оценка

$$\mathbf{P}_{in} = \frac{3}{4\pi} \mathbf{E} \sim \mathbf{H} \sim \mathbf{M}_{in} ,$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля в падающей волне. Вместе с тем напряженность электрического поля \mathbf{E}_{in} в скин-слое,

¹⁵⁾ В данной задаче такому ограничению соответствуют световые волны видимого диапазона.

входящая в формулу (5.9), существенно меньше соответствующей магнитной индукции \mathbf{B}_{in} .¹⁶⁾ Покажем, что на поверхности пылинки имеет место оценка $E_{in}(0) \ll B_{in}(0)$. Ввиду малой толщины скин-слоя производные от компонент поля внутри металла в направлении нормали к поверхности велики по сравнению с производными в тангенциальных направлениях. Поэтому поле внутри металла вблизи его поверхности можно рассматривать как поле плоской волны. Соответственно электрическое и магнитное поля в скин-слое связаны друг с другом тем же соотношением, что и в плоской электромагнитной волне, т.е.

$$\mathbf{E}_{in}(0) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{B}_{in}(0), \mathbf{n}].$$

Здесь \mathbf{n} – нормаль к поверхности, направленная внутрь металла. Таким образом,

$$\frac{E_{in}(0)}{B_{in}(0)} \sim \sqrt{\frac{1}{|\varepsilon|}} \approx \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) \ll 1.$$

Сопоставляя (5.1) и (5.9), можно сделать вывод, что электрическая составляющая поглощения световой энергии пренебрежимо мала по сравнению с магнитной (разумеется, с той точностью, в рамках которой получено выражение (5.8)).

Сравним сечение поглощения с сечением рассеяния, найденным в предыдущей задаче. Из (4.15) и (5.8) имеем

$$\frac{\sigma_{\text{P}}}{\sigma_{\text{II}}} = \frac{40\pi}{9} \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \frac{\sigma_0}{\omega_p}.$$

Так как $\omega a/c \ll 1$ в силу предположений задачи, а $\sigma_0/\omega_p \gg 1$, то результат сравнения не очевиден. Обратимся к численным оценкам, взяв длину волны света $\lambda = 2\pi c/\omega = 0.5$ мкм, радиус пылинки $a = 0.1$ мкм и значение $\sigma_0 = 5.3 \cdot 10^{17}$ 1/с для меди. В таком

¹⁶⁾ Более подробное доказательство этого факта приведено в конце задачи 2.

случае получим, что $\sigma_p/\sigma_n \cong 115$, т.е. сечение рассеяния солнечного света на два порядка превосходит сечение поглощения. Даже при $a = 0.05$ мкм имеем $\sigma_p/\sigma_n \approx 7$. Вывод: солнечный свет в основном рассеивается, а не поглощается на металлической пыли.

Задача 6. Рассеяние и поглощение солнечного света малыми диэлектрическими пылинками.

Определить сечение рассеяния света на малых диэлектрических пылинках сферической формы, имеющих диэлектрическую проницаемость ε . Найти также сечение поглощения света на таких пылинках. Радиус пылинки мал по сравнению с длиной волны света.

Решение. Рассеяние и поглощение света на диэлектрических пылинках, как и в случае проводящих пылинок, обусловлено их поляризацией во внешнем электрическом поле. Однако механизм такой поляризации существенно отличен от того, что реализуется в проводнике. В диэлектрике, как правило, не возникает скин-слоя, и внешнее поле проникает внутрь на всю его толщину. Кроме того, отсутствие токов проводимости приводит к релятивистской малости магнитной составляющей рассеяния по сравнению с электрической. Действительно, отношение среднего (по объему) магнитного момента молекул к приобретаемому во внешнем поле электрическому дипольному моменту, как известно, пропорционально фактору v/c , где v – внутриатомная скорость электронов (см. [5], § 5.2); последняя на два-три порядка меньше скорости света.¹⁷⁾

1. Рассмотрим сначала рассеяние света на диэлектрических пылинках. Согласно условию задачи радиус пылинки a мал по

¹⁷⁾Средняя намагниченность диэлектрического образца пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля, подобно тому как электрическая поляризация пропорциональна напряженности электрического поля падающей волны.

сравнению с длиной волны падающего света $\lambda = 2\pi c/\omega$, т.е.

$$\frac{\lambda}{a} \sim \frac{c}{\omega a} \gg 1.$$

Если при этом ее диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ не слишком велика, а именно, если выполняется условие

$$1 < \sqrt{\varepsilon} \ll \frac{c}{\omega a}, \quad (6.1)$$

то можно решать статическую задачу (уравнение Лапласа) как вне, так и внутри пылинки.¹⁸⁾ В самом деле, характерная длина волны света в диэлектрике составляет $\lambda_\varepsilon \sim c/\omega\sqrt{\varepsilon}$, и оценка (6.1) равносильна требованию $\lambda_\varepsilon \gg a$. В результате временным слагаемым в общем уравнении для скалярного потенциала можно пренебречь во всем пространстве.¹⁹⁾

Подчеркнем, что в задаче 4 мы требовали выполнения противоположного по отношению к (6.1) неравенства, справедливого для хорошего металла (см. (4.3) и (4.4)):

$$\sqrt{|\varepsilon|} \approx \frac{\omega_p}{\omega} \gg \frac{c}{\omega a}.$$

Как следствие, поляризация пылинки была сосредоточена только в тонком скин-слое у ее поверхности.

Уравнение Лапласа для электростатического потенциала φ , которое справедливо как внутри, так и вне пылинки в приближении $a \ll \lambda$, λ_ε (a – радиус пылинки, λ – длина волны падающего света, $\lambda_\varepsilon = \lambda/\sqrt{\varepsilon}$ – длина волны внутри пылинки), решаем в сферической системе координат (см. задачу 4):

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = Cr \cos \theta, & r \leq a, \\ \varphi(r, \theta) = \left(-Er + \frac{D}{r^2}\right) \cos \theta, & r \geq a. \end{cases}$$

¹⁸⁾Неравенство (6.1) особенно хорошо выполняется для полярных диэлектриков, у которых проницаемость ε близка к единице в световом диапазоне частот (см. задачу 3).

¹⁹⁾См. оценку слагаемых в общем уравнении для потенциала, произведенную в задаче 4.

Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ – напряженность электрического поля в падающей световой волне. Используя условие непрерывности потенциала на поверхности пылинки (при $r = a$), получим связь между коэффициентами C и D :

$$C = -E + \frac{D}{a^3}.$$

Из условия непрерывности нормальной компоненты электрической индукции на поверхности пылинки вытекает еще одно уравнение для констант C , D :

$$-\varepsilon C = E + \frac{2D}{a^3}.$$

Исключая из двух последних соотношений D , найдем значение C :

$$C = -\frac{3}{\varepsilon + 2}E.$$

Таким образом, однородное электрическое поле внутри пылинки имеет напряженность

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}.$$

Электрическая поляризация (дипольный момент единицы объема), которая, естественно, тоже однородна всюду внутри пылинки, равна

$$\mathbf{P}_{in} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi}\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)\mathbf{E},$$

а дипольный момент всей пылинки составляет

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathbf{P}_{in} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)a^3\mathbf{E}. \quad (6.2)$$

По своей структуре данное решение полностью эквивалентно хорошо известному выражению для статического дипольного момента, приобретаемого диэлектрическим шариком в постоянном

поле. Отличие заключается лишь в том, что вместо статической диэлектрической проницаемости ε_{st} в (6.2) входит значение $\varepsilon(\omega)$, соответствующее частоте видимого света. У полярных диэлектриков ε_{st} может на несколько порядков превосходить $\varepsilon(\omega)$ (в световом диапазоне частот).

Теперь нам не составит труда определить интенсивность излучения, создаваемого переменным дипольным моментом. По аналогии с решением задачи 4 запишем, что скалярный потенциал индуцируемого пылинкой поля есть

$$\varphi_p = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} \equiv \frac{p \cos \theta}{r^2},$$

и перейдем от него к векторному потенциалу посредством уравнения Лоренца (см. (4.9)):

$$\mathbf{A}_p = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} = -\frac{i\omega a^3}{cr} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) \mathbf{E}. \quad (6.3)$$

Данное соотношение, разумеется, справедливо только в волновой зоне ($r \gg \lambda$). Несмотря на то, что решение (6.3) было получено при ограничении (6.1) на величину ε , в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ оно переходит в формулу (4.9) для хорошего металла.

Напряженность магнитного поля в излучаемой частицей волне суть $\mathbf{H}_i = \text{rot} \mathbf{A}_p$. На большом расстоянии от частицы (в волновой зоне, $r \gg \lambda$) работает эквивалентное представление:

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}}_p, \mathbf{n}].$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в направлении излучения. Подставляя в эту формулу векторный потенциал \mathbf{A}_p из (6.3), найдем

$$\mathbf{H}_i = -\frac{\omega^2 a^3}{c^2 r} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) [\mathbf{E}, \mathbf{n}].$$

Угол между \mathbf{E} и \mathbf{n} обозначим через θ (рис. 3), а угол между направлением падающей волны (\mathbf{n}_0) и рассеянной (\mathbf{n}) – посредством ϑ (так называемый *угол рассеяния*). Из рис. 3 следует, что $\cos \theta = \sin \vartheta \cos \varphi$.

Теперь у нас есть все, чтобы определить среднюю по времени интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$:

$$dI = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{H}_i|^2 r^2 d\Omega = \frac{E_0^2}{8\pi} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^3} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Дифференциальное сечение рассеяния получится делением dI на среднюю плотность потока энергии падающего света $cE_0^2/8\pi$:

$$d\sigma_p = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^4} \{1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi\} d\Omega.$$

Для перехода к неполяризованному солнечному свету мы должны усреднить $d\sigma_p$ по углу φ (см. рис. 3):

$$\langle d\sigma_p \rangle = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^4} \frac{(1 + \cos^2 \vartheta)}{2} d\Omega. \quad (6.4)$$

Интегрируя по всему телесному углу, находим полное сечение рассеяния:

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^4}. \quad (6.5)$$

Оно, как и в случае проводящей пылинки, пропорционально четвертой степени частоты и в приближении $a \ll \lambda \sim c/\omega$ существенно меньше геометрического сечения пылинки πa^2 . Отношение (6.5) к сечению рассеяния $\sigma_{\text{рм}}$ на металлической пылинке того же радиуса (формула (4.15)) есть

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{\text{рм}}} = 0.8 \cdot \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 < 1.$$

Таким образом, сечение рассеяния на диэлектрической пылинке при прочих равных условиях всегда меньше, чем на металлической. Отношение $\sigma_p/\sigma_{\text{рм}}$ не стремится к единице при $\varepsilon \rightarrow \infty$, так как металл дает дополнительный вклад в рассеяние посредством

магнитной поляризации, которой мы пренебрегли при рассмотрении диэлектрика.

Отметим также, что если размер пылинки много больше длины волны света (обратный предельный случай), то сечение рассеяния просто совпадает с ее геометрическим сечением πa^2 независимо от того, является ли пылинка диэлектрической или металлической. Постарайтесь самостоятельно дать объяснение этому результату.

2. Обратимся теперь к поглощению света диэлектрическими пылинками. В качестве примера рассмотрим капельки воды субмикронного размера, присутствующие в большом количестве в атмосфере. Молекула воды является полярной, и ее поляризуемость $\alpha(\omega)$ резко уменьшается с ростом частоты ω внешней электромагнитной волны. Согласно модели Дебая

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 - i\omega\tau},$$

где α_0 – статическая ориентационная поляризуемость, а τ – некоторое время релаксации (см. задачу 3). В жидкостях это время может быть выражено через радиус молекулы r_0 (которая предполагается сферической частицей), абсолютную температуру T и коэффициент динамической вязкости жидкости η :

$$\tau = \frac{4\pi\eta r_0}{T}.$$

К примеру, для молекулы воды при комнатной температуре, полагая $r_0 = 0.1$ нм, найдем значение $\tau = 10^{-11}$ с. В результате для частот из видимого диапазона величина $\omega\tau \gg 1$, и

$$\alpha(\omega) \approx \frac{i\alpha_0}{\omega\tau}.$$

Как и в рассмотренном выше случае рассеяния, магнитной поляризацией пренебрегаем по сравнению с электрической.

Индукцированный дипольный момент капельки, очевидно, равен

$$\mathbf{p} = n_a V \text{Re} [\alpha(\omega) \mathbf{E}_{\text{in}}]. \quad (6.6)$$

Здесь n_a – концентрация молекул в капельке, а $V = 4\pi a^3/3$ – ее объем. Напряженность однородного поля внутри капельки \mathbf{E}_{in} связана с напряженностью внешнего поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ уже полученным в этой задаче соотношением

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}, \quad (6.7)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость. Последнюю легко определить из приведенной выше формулы для поляризации капельки $\alpha(\omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{in} &= i \frac{n_a \alpha_0}{\omega \tau} \mathbf{E}_{in} = \frac{(\varepsilon - 1)}{4\pi} \mathbf{E}_{in}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_e + i \frac{4\pi n_a \alpha_0}{\omega \tau}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь мы учли не только ориентационную (мнимую) часть поляризуемости молекул, но и добавили электронную (вещественную) компоненту ε_e , которая слабо зависит от частоты света. Определяя для удобства безразмерный параметр $\gamma = 4\pi n_a \alpha_0 / 3\omega \tau$,²⁰⁾ на основании (6.7) найдем

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{1}{(\varepsilon_e + 2)/3 + i\gamma} \mathbf{E}.$$

Следовательно, вещественный дипольный момент капельки в соответствии с (6.6) равен

$$\mathbf{p} = a^3 \operatorname{Re} \left[\frac{(\varepsilon_e - 1)/3 + i\gamma}{(\varepsilon_e + 2)/3 + i\gamma} \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \right].$$

Теперь мы можем посчитать поглощаемую капелькой мощность Q , которая определяется законом Джоуля–Ленца:

$$Q = -\mathbf{p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d\mathbf{E}_{in}}{dt} \right\}.$$

²⁰⁾ Для воды при нормальных условиях и светового диапазона частот $\gamma \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \ll 1$.

Подставляя сюда выражения для \mathbf{p} , \mathbf{E}_{in} и производя усреднение по периоду внешнего поля, после несложных преобразований получим достаточно простое окончательное выражение для поглощаемой капелькой мощности; оно не содержит вещественной компоненты ε_e диэлектрической проницаемости:

$$Q = \frac{1}{2} a^3 \gamma \omega E_0^2 = \frac{\alpha_0 N}{2\tau} E_0^2.$$

Здесь $N = n_a V$ – число молекул в капельке. Деля это выражение на плотность потока падающей световой энергии $cE_0^2/8\pi$, найдем сечение поглощения:

$$\sigma_{\Pi} = \frac{4\pi\alpha_0 N}{c\tau}.$$

Статическую ориентационную поляризуемость α_0 можно выразить через известную из эксперимента статическую диэлектрическую проницаемость воды $\varepsilon_{st} = 81$ (*статическая формула Клаузиуса–Моссотти*):

$$\alpha_0 = \left(\frac{\varepsilon_{st} - 1}{\varepsilon_{st} + 2} \right) a_m^3,$$

a_m – радиус молекулы. Поскольку в жидкости молекулы плотно упакованы, произведение $(4\pi a_m^3/3)N$ есть объем капельки V . В итоге

$$\sigma_{\Pi} = 3 \left(\frac{\varepsilon_{st} - 1}{\varepsilon_{st} + 2} \right) \frac{V}{c\tau}.$$

Для капельки радиуса $a = 0.1$ мкм отношение данного сечения поглощения к геометрическому сечению πa^2 равно $1.3 \cdot 10^{-4}$. В приближении $\omega\tau \gg 1$ сечение поглощения света в капельках, состоящих из полярного диэлектрика, не зависит от его частоты.

Отметим, что в формуле (6.5) для сечения рассеяния света в случае с капелькой воды нужно использовать значение $\varepsilon = \varepsilon_e \approx 1.8$. Малой мнимой добавкой $3i\gamma$ в общем выражении (6.8) для диэлектрической проницаемости можно пренебречь в

световом диапазоне частот. Отношение сечения рассеяния к геометрическому сечению для капельки радиуса 0.1 мкм равно 0.3. Таким образом, свет в основном рассеивается на микрокапельках воды, а не поглощается. Характерная длина поглощения света в атмосфере при концентрации капелек $N = 10^8 \text{ 1/см}^3$ (когда они занимают всего $4 \cdot 10^{-7}$ от общего объема воздуха) составляет $l = 1/N\sigma_{\text{п}} = 2 \text{ км}$, в то время как длина рассеяния оказывается порядка одного метра.

Задача 7. Рассеяние солнечного света на флуктуациях плотности и на отдельных молекулах.

Определить интенсивность рассеяния света статистическими флуктуациями плотности в нижних слоях атмосферы. Рассмотреть также рассеяние на отдельных молекулах в верхних слоях атмосферы.

Решение. В верхних слоях атмосферы длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с длиной волны излучения, и рассеяние на каждой молекуле можно рассматривать независимо, суммируя затем вклады от отдельных молекул. В нижних слоях атмосферы картина обратная – длина свободного пробега весьма мала по сравнению с длиной волны видимого света, поэтому имеет место рассеяние не на отдельных молекулах воздуха, а на макроскопической среде. Такое рассеяние возможно на любой макроскопической неоднородности рассматриваемой среды; в отсутствие какой-либо неоднородности свет в диэлектрике распространяется без рассеяния (согласно уравнениям Максвелла для диэлектрической среды).

1. Макроскопической неоднородностью, обуславливающей рассеяние света в нижних слоях атмосферы, служат статистические флуктуации плотности воздуха. Обозначим через N число молекул в некотором фиксированном объеме V . Этот объем должен быть достаточно большим, чтобы к находящимся в нем молекулам можно было применять законы статистической физики.

Флуктуацию количества молекул в объеме V обозначим посредством δN . Диэлектрическая восприимчивость воздуха атмосферы χ пропорциональна концентрации молекул $n = N/V$. А именно, для монохроматического света с частотой ω

$$\chi(\omega) = \frac{ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (7.1)$$

Здесь m , e – масса и заряд электрона, ω_j – собственные частоты электронов в молекуле, безразмерная величина f_j – сила осциллятора. У поверхности Земли средняя концентрация молекул составляет $n = 2.7 \cdot 10^{19}$ 1/см³, и статическая диэлектрическая восприимчивость воздуха $\chi_{ст} = \chi(0) = 4.4 \cdot 10^{-5}$. Так как собственные частоты электронного движения молекул азота и кислорода заметно (в разы) превышают частоту видимого света, функция $\chi(\omega)$ близка к $\chi_{ст}$. Например, в молекуле азота энергия первого возбужденного электронного состояния равна 6 эВ, а ее потенциал ионизации – 15.6 эВ, в то время как энергия фотона, соответствующего зеленому свету, составляет всего около 2.5 эВ. Квадраты этих величин отличаются существенно (можно сказать, что $\omega_j^2 \gg \omega^2$), и поэтому функция $\chi(\omega)$ слабо зависит от частоты в рассматриваемом диапазоне.

Поскольку при фиксированном объеме V величина $\chi \sim N$, то для флуктуации диэлектрической восприимчивости, связанной с флуктуацией плотности воздуха, получим

$$\frac{\delta\chi}{\langle\chi\rangle} = \frac{\delta N}{\langle N\rangle}. \quad (7.2)$$

Символом $\langle \rangle$ обозначено усреднение по статистическому распределению числа молекул. Дипольный момент \mathbf{P} единицы объема воздуха атмосферы (поляризация), созданный солнечным светом

²¹⁾ Данное выражение следует из общей формулы Друде (1.3) (см. задачу 1), если рассматривать диэлектрическую среду (без свободных электронов).

с напряженностью поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, по определению равен

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}.$$

Рассеяние создается флуктуацией $\delta\chi$, т.е. обусловлено наличием флуктуации поляризации

$$\delta\mathbf{P} = \delta\chi \cdot \mathbf{E}.$$

Индукцированный дипольный момент \mathbf{p} объема V , таким образом, равен

$$\mathbf{p} = \delta\mathbf{P} \cdot V = \delta\chi \cdot \mathbf{E}V, \quad \ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \delta\chi \cdot \mathbf{E}V.$$

Если данное значение усреднить по статистическому распределению числа молекул в объеме V , то оно, очевидно, обратится в нуль. Однако дипольное рассеяние пропорционально не самой производной $\ddot{\mathbf{p}}$, а ее квадрату. Действительно, мощность дипольного излучения объема V согласно известной формуле составляет

$$I_V = \frac{2\dot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}.$$

Усреднение данного выражения по статистическому распределению с учетом (7.2) дает

$$\begin{aligned} \langle I_V \rangle &= \frac{2\langle \dot{\mathbf{p}}^2 \rangle}{3c^3} = \frac{2\omega^4 V^2 E_0^2 \cos^2(\omega t)}{3c^3} \langle (\delta\chi)^2 \rangle = \\ &= \frac{2\omega^4 E_0^2 \cos^2(\omega t) \langle \chi \rangle^2}{3\langle n \rangle^2 c^3} \langle (\delta N)^2 \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle n \rangle = \langle N \rangle / V$ – средняя концентрация молекул. Величина $\langle (\delta N)^2 \rangle$ есть не что иное, как среднеквадратичная флуктуация числа молекул в выделенном объеме. Из статистической физики известно, что в случае идеального газа она совпадает со средним числом молекул в данном объеме: $\langle (\delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle$. Подставляя это

в последнюю формулу и производя усреднение по времени (которое обозначим чертой), найдем среднюю мощность излучения объема V :

$$\overline{\langle I_V \rangle} = \frac{\omega^4 E_0^2 \langle \chi \rangle^2}{3 \langle n \rangle^2 c^3} \langle N \rangle.$$

Для мощности рассеяния единицы объема атмосферы имеем

$$I = \frac{\overline{\langle I_V \rangle}}{V} = \frac{\omega^4 E_0^2 \langle \chi \rangle^2}{3 \langle n \rangle c^3}.$$

Наконец, обозначая

$$f(\omega) = \sum_j f_j / (\omega_j^2 - \omega^2)$$

в выражении для χ , получим известную формулу Релея:

$$I = \frac{\langle n \rangle e^4 \omega^4 f^2(\omega)}{m^2 3c^3} E_0^2. \quad (7.3)$$

Величина I имеет размерность Вт/м³. Мы видим, что мощность рассеяния пропорциональна концентрации молекул n , и поэтому основной вклад в рассеяние солнечного света дают нижние слои атмосферы.

Средний по времени поток энергии солнечного света через единичную площадку (вектор Пойнтинга) равен $cE_0^2/8\pi$. Из-за рассеяния этот поток убывает с расстоянием z :

$$\frac{dS}{dz} = -I = -\frac{S}{l}. \quad (7.4)$$

В соответствии с (7.3)

$$l = \frac{3c^4 m^2}{8\pi \langle n \rangle e^4 \omega^4 f^2(\omega)}. \quad (7.5)$$

Интегрируя (7.4), получим закон, по которому уменьшается интенсивность прямого солнечного света по мере приближения к поверхности Земли:

$$S(z) = S_0 \exp(-z/l).$$

Здесь S_0 – начальная интенсивность (в верхних слоях атмосферы). Таким образом, величина l определяет характерную длину рассеяния солнечного света. Поскольку

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

есть классический радиус электрона, соотношение (7.5) можно переписать в виде

$$l = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{\langle n \rangle r_0^2} \frac{1}{\omega^4 f^2(\omega)}. \quad (7.6)$$

Наиболее сильная зависимость l от частоты света осуществляется посредством множителя ω^4 , стоящего в знаменателе. Полагая $f(\omega) \approx \text{const}$ в видимом диапазоне частот (см. оценки в начале этой задачи), приходим к выводу, что при увеличении длины волны света от 0.35 мкм (фиолетовый) до 0.7 мкм (красный) длина рассеяния l согласно (7.6) увеличивается в 16 раз. Именно по этой причине на закате Солнце приобретает оранжево-красные тона. При нормальных атмосферных условиях ($n = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ 1/см}^3$) l составляет 30, 77 и 160 км для фиолетового ($\lambda = 0.4$ мкм), зеленого ($\lambda = 0.5$ мкм) и оранжевого ($\lambda = 0.6$ мкм) цвета соответственно. Голубой цвет неба обусловлен наложением зависимости мощности рассеяния света от частоты (формула (7.3)) на спектральное распределение энергии в излучении Солнца, которое присутствует в амплитудной функции $E_0(\omega)$. Максимум функции $\omega^4 E_0^2(\omega)$ приходится как раз на длину волны голубого цвета.

Сравним рассеяние света на флуктуациях плотности атмосферы с рассеянием на диэлектрической пыли. Согласно решению задачи 6 (формула (6.5)) мощность рассеяния в единице объема,

содержащей $n_{\text{п}}$ пылинок, равна

$$I_{\text{п}} = \sigma_{\text{р}} \frac{cE_0^2}{8\pi} n_{\text{п}} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{n_{\text{п}} \omega^4 a^6}{3c^3} E_0^2.$$

В результате

$$\frac{I_{\text{п}}}{I} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{n_{\text{п}}}{n} \frac{a^4}{f^2(\omega)c^4} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2. \quad (7.7)$$

Для видимого света функция $f(\omega)$ в силу оценки $\omega_j^2 \gg \omega^2$ по порядку величины равна $1/\omega_j^2$. Значит, третья дробь в (7.7) оценивается как $(\omega_j a/c)^4$. Для типичного размера пылинки $a = 0.1$ мкм и значения $\omega_j = 10^{16}$ 1/с получим $\omega_j a/c = 0.03$; соответственно $(\omega_j a/c)^4 \sim 10^{-6}$. Из (7.7), однако, следует, что даже при малой концентрации пылинок (когда $n_{\text{п}} \ll n$) рассеяние на них может преобладать над рэлеевским рассеянием на флуктуациях плотности, поскольку размер пылинки a на много порядков превосходит классический радиус электрона r_0 . Оба вклада сравнимы друг с другом, когда концентрация субмикронных пылинок в 10^5 раз меньше концентрации молекул воздуха.

2. При дипольном рассеянии света на флуктуациях плотности воздуха длина волны света λ должна значительно превышать длину свободного пробега молекулы $l_{\text{сп}}$. Только в пределе $l_{\text{сп}} \ll \lambda$, который реализуется в нижних слоях атмосферы, газовую среду можно считать макроскопической и применять к ней законы статистической физики. Противоположная ситуация, когда $l_{\text{сп}} \gg \lambda$, имеет место в верхних слоях атмосферы, где происходит дипольное рассеяние света на каждой отдельно взятой молекуле среды. Исследуем такое рассеяние.²²⁾

Уравнение Ньютона для электрона, совершающего вынужденные колебания в молекуле с собственной частотой ω_0 , имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} - e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

²²⁾ Ранее рассматривалось рассеяние не на отдельных молекулах, а на микрочастицах, состоящих из большого числа молекул (и являющихся по этой причине сплошной средой).

Его решение:

$$\mathbf{r} = \frac{-e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Индукированный дипольный момент молекулы есть

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Следовательно, средняя по времени мощность излучения одной молекулы равна

$$\bar{I}_1 = \frac{2}{3c^3} \overline{(Re(\ddot{\mathbf{p}}))^2} = \frac{e^4 \omega^4 E_0^2}{3m^2 c^3 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Умножая эту величину на концентрацию молекул n , получим мощность рассеяния единицы объема газа:

$$I = n\bar{I}_1 = \frac{ne^4 \omega^4 E_0^2}{3m^2 c^3 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Это выражение по структуре совпадает с формулой (7.3) для рэлеевского рассеяния; таким образом, мощности рассеяния на отдельных молекулах воздуха и на флуктуациях его плотности даются одинаковыми соотношениями. Однако из-за того, что обе они пропорциональны концентрации молекул воздуха n , доминирующим оказывается рассеяние света на флуктуациях плотности в нижних слоях атмосферы, где длина волны света велика по сравнению с длиной свободного пробега молекулы газа.

Формула (7.3) также справедлива в переходной области, где $l_{\text{ср}} \sim \lambda$. Данная область соответствует длине свободного пробега порядка 0.5 мкм, тогда как у поверхности Земли $l_{\text{ср}} \sim 0.01$ мкм. Длина свободного пробега обратно пропорциональна концентрации молекул; уменьшение концентрации в 50 раз происходит на высоте около 30 км. Именно в районе этой высоты наблюдается плавный переход от рассеяния на флуктуациях плотности к рассеянию на отдельных молекулах газа.

Задача 8. Давление солнечного света на малые пылинки в атмосфере.

Определить силу давления света на малые пылинки сферической формы.

Решение. При рассеянии на угол ϑ световые фотоны оказывают давление, равное изменению продольной компоненты плотности потока импульса волны:

$$p_c = \frac{S}{c}(1 - \cos \vartheta). \quad (8.1)$$

Здесь $S = cE_0^2/8\pi$ – среднее по времени значение вектора Пойнтинга ($\text{Вт}/\text{м}^2$) в падающей волне. Чтобы от давления перейти к суммарной силе, нужно принять во внимание угловое распределение рассеиваемой пылинкой мощности, которое дается дифференциальным сечением рассеяния.

1. Рассмотрим диэлектрические пылинки. Сечение рассеяния определяется формулой (6.4):

$$d\sigma_p = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{c^4} \frac{(1 + \cos^2 \vartheta)}{2} d\Omega. \quad (8.2)$$

Умножая интенсивность (вектор Пойнтинга) падающей волны на дифференциальное сечение рассеяния, получим мощность, излучаемую пылинкой в телесный угол $d\Omega$. Таким образом, при перемножении (8.1) и (8.2) с последующим интегрированием по всему телесному углу найдем искомую силу давления на пылинку:

$$\begin{aligned} F_p &= \int p_c d\sigma_p = \frac{E_0^2}{8\pi} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{2c^4} \times \\ &\times \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta)(1 + \cos^2 \vartheta) 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 \frac{\omega^4 a^6}{3c^4} E_0^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Сечение поглощения света в диэлектрической пылинке обычно на несколько порядков меньше сечения рассеяния (см. задачу 6), и оно практически не влияет на результат.

2. Теперь обратимся к металлической пылинке. Согласно формуле (4.14) для дифференциального сечения рассеяния имеем

$$d\sigma_p = \frac{\omega^4 a^6}{c^4} \left\{ \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cos^2 \vartheta - \cos \vartheta \right\} d\Omega. \quad (8.4)$$

Умножая (8.4) на (8.1) и интегрируя по всему телесному углу, получим искомую силу светового давления:

$$\begin{aligned} F_p &= \int p_c d\sigma = \frac{E_0^2 \omega^4 a^6}{8\pi c^4} \times \\ &\times \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta) \left[\frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cos^2 \vartheta - \cos \vartheta \right] 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{7\omega^4 a^6}{12c^4} E_0^2. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Подчеркнем, что предел $\varepsilon \rightarrow \infty$ в выражении (8.3) не совпадает с (8.5) из-за большой роли магнитной компоненты рассеяния для металлической пылинки.

К выражению (8.5) нужно, однако, еще добавить вклад от поглощенных пылинкой фотонов; в отличие от диэлектрика поглощение света металлом может быть сравнимо по порядку величины с рассеянием (см. задачу 5). Соответствующая компонента силы есть

$$F_{\Pi} = \frac{S}{c} \sigma_{\Pi},$$

где σ_{Π} – сечение поглощения металлической пылинки. Согласно формуле (5.8)

$$\sigma_{\Pi} = \frac{3\omega_p}{4\sigma_0} a^2.$$

Здесь σ_0 – статическая удельная проводимость металла, ω_p – плазменная частота электронов. ²³⁾ Следовательно, сила давления, обусловленная поглощением, составляет

$$F_{\text{п}} = \frac{3}{32\pi} \left(\frac{\omega_p}{\sigma_0} \right) a^2 E_0^2.$$

Суммарная сила давления на металлическую пылинку, таким образом, равна

$$F = F_{\text{р}} + F_{\text{п}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\omega_p}{\sigma_0} \right) + \frac{7}{3} \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \right\} a^2 E_0^2.$$

Второе слагаемое в данном выражении обычно преобладает над первым, поскольку сечение рассеяния, как правило, заметно больше сечения поглощения (см. оценки в задаче 5).

Задача 9. Рассеяние солнечного света на свободных электронах и атомах в ионосфере.

Сравнить рассеяние солнечного света на свободных электронах и на нейтральных атомах в ионосфере.

Решение. Выражение для мощности дипольного рассеяния на нейтральных атомах, составляющих абсолютное большинство в слабо ионизированной плазме ионосферы, было получено в задаче 7 (см. (7.3)): ²⁴⁾

$$I_a = \frac{n_a e^4 \omega^4 f^2(\omega)}{3m^2 c^3} E_0^2. \quad (9.1)$$

Эта величина отнесена к единице объема среды; n_a суть концентрация нейтральных молекул в ионосфере, m и e – масса и заряд

²³⁾К примеру, для медной пылинки ($\omega_p = 1.65 \cdot 10^{16}$ 1/с, $\sigma_0 = 5.3 \cdot 10^{17}$ 1/с) $\sigma_{\text{п}} \approx 0.007\pi a^2$.

²⁴⁾В ионосфере можно говорить о рассеянии на отдельных атомах, поскольку длина свободного пробега существенно превосходит длину волны света.

электрона, функция

$$f(\omega) = \sum_j f_j / (\omega_j^2 - \omega^2)$$

содержит собственные частоты ω_j электронов в атомах, E_0 – амплитуда электрического поля падающей волны, ω – его частота. В силу оценок, приведенных в задаче 7, для частот видимого света справедливо неравенство $\omega^2 \ll \omega_j^2$, и поэтому функция $f(\omega)$ слабо зависит от частоты; с хорошей точностью можно положить $f(\omega) \approx f(0)$. Значение же $f(0)$ нетрудно найти из формулы (7.1). Вводя характерную собственную частоту ω_0 в соответствии с определением

$$\frac{1}{\omega_0^2} = f(0) \equiv \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2},$$

из (7.1) получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{m\chi(0)}}.$$

Статическая диэлектрическая восприимчивость молекул воздуха $\chi(0)$ измеряется экспериментально; у поверхности Земли, где концентрация молекул составляет $n = 2.7 \cdot 10^{19}$ 1/см³, она равна $4.4 \cdot 10^{-5}$. В результате $\hbar\omega_0 \approx 8.2$ эВ, в то время как у зеленого света ($\lambda = 0.5$ мкм) величина $\hbar\omega = 2.48$ эВ. Выражение для интенсивности рассеяния света на нейтральных атомах с учетом оценки $f(\omega) \approx f(0)$ и определения ω_0 преобразуется к виду

$$I_a = \frac{n_a e^4}{3m^2 c^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 E_0^2.$$

Рассмотрим теперь рассеяние света на свободных электронах. Запишем уравнение Ньютона для вынужденных колебаний свободного электрона в поле падающей волны:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t).$$

Следовательно, дипольный момент одного электрона равен

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = -\frac{e^2\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t),$$

и средняя по времени мощность рассеяния единицы объема электронного газа составляет

$$I_e = \frac{2\overline{(\ddot{\mathbf{p}}^2)}}{3c^3} n_e = \frac{n_e e^4}{3m^2 c^3} E_0^2.$$

Здесь n_e – концентрация свободных электронов в ионосфере. Заметим, что I_e вообще не зависит от частоты света. Для искомого отношения интенсивностей, таким образом, получим

$$\frac{I_a}{I_e} \approx \frac{n_a}{n_e} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (9.2)$$

Хотя относительная концентрация электронов в ионосфере довольно мала ($n_e \ll n_a$), из-за наличия в (9.2) малого фактора $(\omega/\omega_0)^4$ рассеяние на свободных электронах может оказаться доминирующим ($I_e > I_a$). Для зеленого света ($\hbar\omega = 2.48$ эВ) в соответствии с (9.2) находим, что оба типа рассеяния сравниваются друг с другом при концентрации электронов $n_e \approx 0.008n_a$.

Глава 3

Распространение электромагнитных волн в ионосфере

Задача 10. Распространение электромагнитных волн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли.

Рассмотреть распространение электромагнитных волн в ионосфере с учетом магнитного поля Земли.

Решение. В данной задаче удобно разложить электромагнитную волну произвольной поляризации на суперпозицию двух циркулярно-поляризованных волн: левой и правой (это всегда возможно). В дальнейшем будем отдельно рассматривать распространение волн с определенной циркулярной поляризацией вдоль силовых линий магнитного поля Земли (ось z на рис. 5). Как мы видели в задаче 9, даже при малой концентрации свободных электронов в ионосфере они, зачастую, играют определяющую роль в создании поляризации среды.²⁵⁾ На нерелятивистское движение электронов в плоскости (x, y) , перпендикулярной направлению распространения волны (z), влияет как электрическое поле волны

$$\mathbf{E}(t) = E_0[\mathbf{e}_x \cos(\omega t) \pm \mathbf{e}_y \sin(\omega t)], \quad ^{26)}$$

так и магнитное поле Земли с напряженностью $H_z \equiv H$. Уравне-

²⁵⁾ Вкладом ионов в поляризацию из-за их большой массы можно пренебречь.

²⁶⁾ Знаки \pm соответствуют противоположным направлениям циркулярной поляризации.

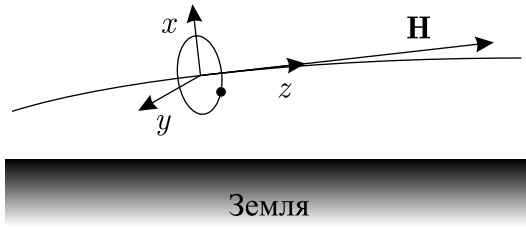


Рис. 5

ния движения электрона в этой плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eE \cos(\omega t) - \frac{e}{c} \dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= \mp eE \sin(\omega t) + \frac{e}{c} \dot{x}H. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Представив решение системы (10.1) в форме

$$x(t) = X \cos(\omega t), \quad y(t) = Y \sin(\omega t),$$

получим систему двух алгебраических уравнений для X и Y :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 X &= -eE - \frac{e\omega}{c} YH, \\ -m\omega^2 Y &= \mp eE - \frac{e\omega}{c} XH. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X = \pm Y = \frac{eE_0}{m\omega(\omega \mp \omega_H)};$$

здесь введена Ларморова частота $\omega_H = eH/mc$. Таким образом, дипольный момент, создаваемый отклонением электрона, равен

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = -e[\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y] = \alpha \mathbf{E},$$

где величина

$$\alpha_{\pm} = -\frac{e^2 E_0}{m\omega(\omega \mp \omega_H)}$$

суть “поляризуемость” электрона в электрическом поле волны. Зная поляризуемость одного электрона, можно найти диэлектрическую проницаемость ионосферы с электронной концентрацией n_e :

$$\varepsilon_{\pm}(\omega) = 1 + 4\pi n_e \alpha_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}, \quad (10.2)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m}$ – плазменная частота электронов. При отсутствии магнитного поля ($\omega_H = 0$) выражение (10.2) переходит в известную формулу $\varepsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$. Отметим также, что при изменении направления распространения волны на противоположное (против магнитного поля) меняется знак у ω_H . В результате значения ε для правой и левой поляризаций всего лишь меняются местами, и в дальнейшем можно полагать $\omega_H > 0$.

Диэлектрическая проницаемость ионосферы различна для левой и правой циркулярных поляризаций волны. Соответственно волны с разной поляризацией распространяются с разными фазовыми скоростями:

$$v_{\pm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\pm}}}.$$

На основании (10.2) нетрудно сделать простой вывод: если частота электромагнитной волны с правой поляризацией (верхний знак) находится в пределах

$$\omega_H \leq \omega \leq \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_p^2} = \omega_+, \quad (10.3)$$

то v_+ является чисто мнимой величиной, и такая волна не может распространяться в ионосфере. То же самое относится и к волне, имеющей левую поляризацию, когда ее частота лежит в диапазоне

$$0 \leq \omega \leq -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_p^2} = \omega_-. \quad (10.4)$$

Заметим, что $\omega_+ = \omega_- + \omega_H > \omega_-$.

Обратимся к интерпретации полученных результатов. Типичная концентрация свободных электронов в нижних слоях ионосферы составляет $n_e = 10^4$ 1/см³, и $\omega_p = 6 \cdot 10^6$ 1/с. А так как напряженность магнитного поля Земли в районе экватора равна $H = 0.3$ эрстед, то и для Ларморовой частоты получается $\omega_H = 6 \cdot 10^6$ 1/с. С ростом высоты, по мере увеличения концентрации свободных электронов, растет их плазменная частота ω_p (в то время как ω_H остается практически постоянной), а значит увеличиваются и предельные частоты ω_{\pm} , определяющие верхнюю границу диапазонов непропускания (см. (10.3) и (10.4)). Следовательно, может реализоваться ситуация, когда электромагнитная волна с частотой $\omega > \omega_{+\min}$ (значение $\omega_{+\min} \approx 10^7$ 1/с соответствует нижней границе ионосферы), имеющая первоначально линейную поляризацию, на некоторой критической высоте h_+ частично отразится от плазмы, распадаясь при этом на две циркулярно-поляризованные волны. Понятно, что на данной высоте происходит отражение только компоненты с правой циркулярной поляризацией, поскольку предельная частота ω_+ , будучи больше ω_- , раньше достигает значения ω . Компонента с левой поляризацией проходит несколько дальше вплоть до высоты $h_- > h_+$, на которой в свою очередь ω_- сравнивается с ω , и происходит полное отражение волны.

Возможны также и другие случаи отражения электромагнитных волн от ионосферы, сопровождающиеся изменением поляризации; рекомендуем вам самостоятельно их исследовать. Здесь мы рассмотрим лишь низкочастотный предел, когда $\omega \ll \omega_H$ (но $\omega_p \sim \omega_H$). В силу неравенств (10.3) и (10.4) в ионосфере распространяется низкочастотная волна только с правой циркулярной поляризацией; она имеет фазовую скорость

$$v(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_+}} \approx c \frac{\sqrt{\omega \cdot \omega_H}}{\omega_p} \ll c.$$

Подобная волна характеризуется довольно сильной дисперсией: возмущения с более высокими частотами движутся быстрее, чем с

низкими. Например, при грозовом разряде, генерирующем широкий спектр радиоволн, в радиоприемнике слышен свист, который начинается с высоких частот и через несколько секунд заканчивается низкими.

Задача 11. Низкочастотные собственные электромагнитные колебания в атмосфере, вызываемые грозowymi разрядами.

Рассмотреть низкочастотные собственные электромагнитные колебания в атмосфере, создаваемые грозowymi разрядами.

Решение. Атмосферу Земли можно рассматривать как сферический резонатор. Наружная оболочка этого резонатора есть нижняя граница ионосферы (статическая удельная проводимость составляет $\sigma_0 \sim 10^3$ 1/с, с последующим увеличением до 10^6 1/с в верхних слоях), а внутренняя оболочка образована поверхностью мирового океана ($\sigma_0 \sim 10^9$ 1/с). Толщина такого резонатора $h \sim 100$ км мала по сравнению с радиусом Земли $R = 6400$ км, что существенно упрощает процедуру решения.

Хотя проводимость оболочек резонатора в нашем случае далека от идеальной (особенно во внешней оболочке – ионосфере), для получения качественного решения вполне подходит предел $\sigma_0 \rightarrow \infty$. Как известно, на поверхности идеального проводника не может быть ненулевых тангенциальных компонент напряженности электрического поля. Применимо к сферической геометрии (рис. 6) это означает, что угловые компоненты E_θ и E_φ обращаются в ноль на стенках резонатора. Если бы мы захотели исследовать собственные колебания именно угловых компонент электрического поля в резонансной полости, то вынуждены были бы потребовать наличие у них периодичности по радиальной координате r ; только в таком случае можно получить нетривиальное решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям. Однако характерная частота радиальных колебаний внутри узкого сферического слоя толщиной h по порядку величины равна c/h , и в

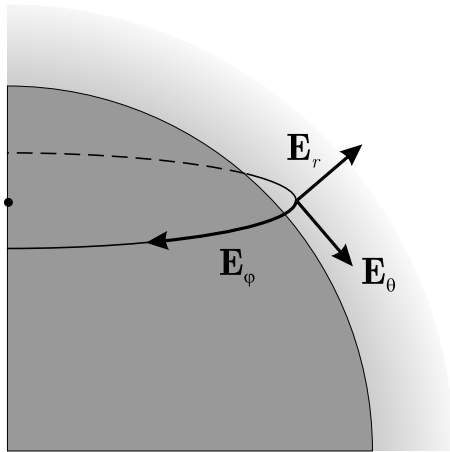


Рис. 6

силу оценки $h \ll R$ она существенно превосходит частоту окружающих колебаний, которую можно оценить как c/R . Следовательно, низкочастотные колебания не должны содержать периодичности по r , что возможно только для радиальной компоненты напряженности электрического поля E_r . В самом деле, компонента E_r перпендикулярна оболочкам резонатора и не обязана обращаться на них в ноль; по этой причине для нее существует нетривиальное решение, не зависящее от r . Уравнение для функции $E_r(\theta, \varphi)$ при $E_\theta = E_\varphi \equiv 0$ имеет вид

$$\Delta E_r + \frac{\omega^2}{c^2} E_r = 0.$$

Поскольку мы интересуемся собственными колебаниями с наименьшими частотами, нужно оставить только нулевую гармонику в фурье-разложении

$$E_r(\theta, \varphi) = \sum_m F_m(\theta) e^{im\varphi}, \quad (11.1)$$

которая не зависит от φ . Для функции $F_0(\theta) \equiv E_r$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF_0}{d\theta} \right) + \frac{\omega^2 R^2}{c^2} F_0 = 0.$$

Ограниченное при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ решение данного уравнения существует лишь в том случае, когда

$$R^2 \frac{\omega^2}{c^2} = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

и выражается через полиномы Лежандра: $E_r(\theta) = E \cdot P_l(\cos \theta)$ ($E = \text{const}$). Таким образом, собственные частоты, обусловленные колебаниями по направлению θ , есть

$$\omega = \omega_l = \sqrt{l(l+1)} \frac{c}{R}. \quad (11.2)$$

Для нескольких первых частот находим

$$\nu_l = \frac{\omega_l}{2\pi} = 10.6 \text{ Гц } (l = 1), \quad 18.3 \text{ Гц } (l = 2), \quad 25.8 \text{ Гц } (l = 3).$$

Это так называемые *резонансы Шумана*. Они были теоретически обоснованы в 1952 г. и экспериментально обнаружены в 1960 г. по характерным максимумам в энергетических спектрах атмосферных шумов. Основным источником возбуждения подобных волн являются вертикальные молниевые разряды. Резонансы Шумана наблюдались также и после атомных взрывов в атмосфере. Заметим, что экспериментальные значения частот резонансов оказываются несколько меньше теоретических: 8, 14, 20, 26 Гц. Различие связано с тем, что верхняя стенка резонатора (ионосфера) не является идеальным проводником, и в ней присутствует скин-слой. Наличие скин-слоя обуславливает плавное затухание волны по высоте.²⁷⁾ В результате эффективный объем резонатора увеличивается, что приводит к уменьшению собственных частот по сравнению с (11.2).

²⁷⁾ Отражение радиоволн от ионосферы подробно рассматривается в задачах 12 и 13.

Определим магнитное поле в данном типе колебаний. Проектируя уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}$$

на тангенциальное (по отношению к стенкам полости) направление φ , имеем

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} = \frac{i\omega}{c}H_\varphi.$$

Следовательно,

$$H_\varphi = \frac{icE}{\omega R}\frac{d}{d\theta}\{P_l(\cos\theta)\}.$$

Нетрудно убедиться, что остальные компоненты \mathbf{H} равны нулю, и $\mathbf{H}\perp\mathbf{E}$.

В общем случае функция E_r зависит также от переменной φ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\varphi^2} + \frac{\omega^2 R^2}{c^2}E_r = 0,$$

решение которого выражается через сферические функции

$$E_r(\theta, \varphi) = E \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

m – номер гармоники в фурье-разложении (11.1) по переменной φ . Для частот собственных колебаний получается при этом прежнее выражение (11.2), т.е. колебания вырождены по значениям

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

Такое вырождение с математической точки зрения эквивалентно вырождению квантово-механических уровней энергии частицы в центральном поле. Влияние магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере приводит к расщеплению каждой резонансной частоты из набора (11.2) на $2l+1$ компоненту.

Задача 12. Отражение радиоволн от E-слоя ионосферы.

Экспериментальная электронная концентрация n_e в нижнем слое ионосферы "E" (90 – 140 км) линейно растет с высотой z . Исследовать отражение радиоволн от этого слоя.

Решение. Диэлектрическая проницаемость ионосферы, связанная с наличием свободных электронов, есть

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m\omega^2}.$$

Здесь ω – частота радиоволны, а n_e – электронная концентрация. Вкладом нейтральных молекул в поляризацию среды, как правило, можно пренебречь (см. задачу 9). Так как по предположению задачи $n_e(z) = a + bz$, то выражение для ε представимо в виде

$$\varepsilon(z) = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{(z_0 - z)}{l}, \quad (12.1)$$

где величина l характеризует скорость увеличения n_e с высотой (толщина E-слоя), а z_0 суть высота, на которой $\varepsilon = 0$; плазменная частота $\omega_p = \sqrt{4\pi n_{em} e^2 / m}$ соответствует максимальной высоте (и электронной концентрации) в пределах E-слоя. На нижней границе ионосферы, находящейся на высоте z_1 , диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \approx 1$, поскольку n_e близка к нулю. На практике n_e составляет примерно $2 \cdot 10^4$ 1/см³ при $z = 90$ км, что почти на порядок меньше $n_{em} = 10^5$ 1/см³ в районе верхней границы E-слоя (при $z = z_{\max} = 140$ км). Полагая в (12.1) $z = z_1$, для "критической" высоты z_0 имеем

$$\frac{(z_0 - z_1)}{l} = \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2;$$

она существенно зависит от частоты. Если $\omega > \omega_p$, то $z_0 > z_1 + l = z_{\max}$, и волны с такими частотами проходят E-слой.

В низкочастотном пределе ($\omega \ll \omega_p$) точка z_0 приближается к нижней границе ионосферы (z_1).

Рассмотрим монохроматическую радиоволну, распространяющуюся вдоль вертикальной оси z . Записывая уравнение Максвелла для напряженности электрического поля E (вектор \mathbf{E} перпендикулярен z)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} E = 0, \quad (12.2)$$

приведем его с учетом (12.1) к виду

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{z_0 - z}{d^3} E = 0. \quad (12.3)$$

Здесь $d^3 = l \cdot (c/\omega_p)^2$. Величина d имеет размерность длины и в силу (12.3) определяет расстояние, на котором существенно изменяется напряженность электрического поля. Отметим, что d не зависит от частоты радиоволны. Уравнение (12.3) можно еще упростить, перейдя к переменной $u = (z_0 - z)/d$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + uE = 0. \quad (12.4)$$

Это – *уравнение Эйри*, и его общее решение не выражается через элементарные функции. Тем не менее можно построить *асимптотическое решение* уравнения Эйри при $u \gg 1$; оно имеет простую структуру, аналогичную квазиклассическому решению уравнения Шредингера $\psi'' + k^2(x)\psi = 0$ ($k \gg 1$):

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \cos \left(\int_0^x k(\xi) d\xi - \frac{\pi}{4} \right) \quad (12.5)$$

(A – нормировочный коэффициент). Данное решение получено с помощью так называемого ВКБ метода. Суть его заключается в следующем. Представим решение общего уравнения $y'' + \lambda^2 f(x)y = 0$ ($\lambda \gg 1$, $f(x) = O(1)$), частным случаем которого

является уравнение (12.4), в виде асимптотического разложения $y(x) = A \cdot \exp \{ \lambda [w_0(x) + \lambda^{-1}w_1(x) + O(\lambda^{-2})] \}$ по степеням λ^{-1} . Подстановка такого разложения в уравнение приводит к системе дифференциальных уравнений первого порядка для новых функций $w_0(x)$ и $w_1(x)$; из ее решения и вытекает формула (12.5). Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в этом.

В результате приходим к следующему асимптотическому решению для электрического поля:

$$E(z, t) = \frac{A}{\sqrt[4]{u}} \cos \left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) e^{-i\omega t}. \quad (12.6)$$

При $u < 0$ ($z > z_0$) данное решение экспоненциально затухает, что и соответствует отражению радиоволны от плазмы. Точка z_0 , таким образом, разграничивает две физически различные области и по этой причине носит название *точки поворота*.

Функция (12.6) описывает поле стоячей волны, формирующейся в результате суперпозиции падающей и отраженной волн. В небольшой окрестности точки поворота решение (12.6) непригодно, поскольку не выполняется предположение $u \gg 1$, использовавшееся при его выводе. В *геометрической оптике* отражение имеет место строго в точке $z = z_0$, однако из-за ограниченности частоты у реальной радиоволны область отражения “размазывается” в пространстве. Для частоты $\nu = \omega/2\pi = 4$ МГц экспериментальное значение z_0 составляет около 130 км.

Обратим внимание на то, что в условиях задачи реализуется оценка $d \ll z_0$, и асимптотическое решение (12.6) очень быстро достигается по мере удаления от точки поворота. Действительно, определенная выше плазменная частота на верхней границе Е-слоя (при электронной концентрации $n_{em} \approx 10^5$ 1/см³) равна $\omega_p \approx 2 \cdot 10^7$ 1/с, а толщина Е-слоя составляет $l \approx 50$ км. В результате

$$d = (l \cdot (c/\omega_p)^2)^{1/3} \approx 0.2 \text{ км}.$$

Значит, неравенство $d \ll z_0$ выполняется с хорошей точностью, так как z_0 лежит в пределах от 90 до 140 км. Величина d определя-

ет характерный размер области, в которой поле экспоненциально затухает до нуля после прохождения высоты $z = z_0$. В этом можно косвенно убедиться из структуры решения (12.6), содержащего переменную $u = (z_0 - z)/d$, однако более строгий анализ требует построения внутреннего асимптотического решения в окрестности точки $u = 0$.

Чтобы оценить константу A в (12.6), рассмотрим нижнюю границу E-слоя, где $\varepsilon \approx 1$. Соответствующее значение переменной u есть

$$u_1 = \frac{z_0 - z_1}{d} = \frac{l}{d} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \left(\frac{\omega_p l}{c} \right)^{2/3}.$$

При не слишком низких частотах $u_1 \gg 1$. Если E_0 – амплитуда падающей волны, то

$$\frac{A}{\sqrt[4]{u_1}} = 2E_0,$$

так как имеет место суперпозиция падающей и отраженной волн. В конечном итоге выражение (12.6) может быть переписано в виде

$$E(z, t) = 2E_0 \sqrt[4]{\frac{u_1}{u}} \cos \left(\frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) e^{-i\omega t}, \quad (12.7)$$

$u_1 > u > 0$. Экспоненциальное убывание поля в области $u < 0$ (выше точки отражения $z = z_0$) описывается функцией

$$E(z, t) = E_0 \sqrt[4]{\frac{u_1}{|u|}} \exp \left(-\frac{2}{3} |u|^{3/2} \right) e^{-i\omega t}. \quad (12.8)$$

Множитель $1/2$ добавился в (12.8) по сравнению с (12.7) в результате сшивки асимптотических решений в области $u = O(1)$, где квазиклассическое приближение не годится, и решение уравнения (12.4) выражается через функции Эйри.²⁸⁾ Физически уменьшение амплитуды поля в два раза при переходе в область $z > z_0$ связано с наличием в ней только прошедшей волны.

²⁸⁾ По той же причине из аргумента в (12.8) выпала фаза $\pi/4$.

В случае произвольной зависимости $\varepsilon(z)$ асимптотическое решение уравнения (12.2) в области $z < z_0$ определяется соотношением

$$E(z, t) = \frac{2E_0}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} \cos \left(\frac{\omega}{c} \int_z^{z_0} \sqrt{\varepsilon(\zeta)} d\zeta - \frac{\pi}{4} \right) e^{-i\omega t}, \quad (12.9)$$

которое обобщает (12.6). Относительно погрешности асимптотического решения (12.6) можно сказать следующее. Уже при $u = 5$ отклонение (12.6) от точного решения составляет всего 1%; это нетрудно получить, оценивая отброшенные слагаемые в асимптотическом представлении функций Эйри. Заметим также, что величина $-\varepsilon(z)$ играет роль эффективной потенциальной энергии для электромагнитной волны. На рис. 7 приведена иллюстрация, качественно объясняющая отражение волны от E-слоя ионосферы.

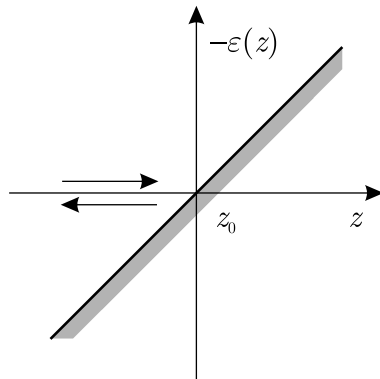


Рис. 7

Задача 13. Отражение радиоволн от F-слоя ионосферы.

Экспериментальная электронная концентрация n_e в F-слое ионосферы (140 – 300 км) может быть качественно аппрокси-

мирована параболой:

$$n_e = n_{em} \left[1 - a(z - z_m)^2 / z_m^2 \right]. \quad (13.1)$$

Здесь $n_{em} = 7 \cdot 10^5$ 1/см³ – максимальная концентрация электронов, $z_m = 250$ км – высота, на которой достигается эта концентрация, $a \approx 14$. Исследовать отражение радиоволн от F-слоя.

Решение. Все результаты, полученные в предыдущей задаче для E-слоя ионосферы, естественно, применимы и к F-слою. Зависимость электрического поля от высоты $E(z)$ в области, где работает асимптотическое представление, дается формулой (12.9). Координата z_0 точки, в которой начинается отражение радиоволны, определяется из уравнения

$$\varepsilon(z_0) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e(z_0)}{m\omega^2} = 0. \quad (13.2)$$

Подставляя (13.1) в (13.2) и вводя обозначение

$$-\varepsilon_0 = 1 - \frac{4\pi e^2 n_{em}}{m\omega^2},$$

получим

$$\varepsilon_0 = a \frac{4\pi e^2 n_{em}}{m\omega^2} \left(\frac{z_m - z_0}{z_m} \right)^2 = a(1 + \varepsilon_0) \left(\frac{z_m - z_0}{z_m} \right)^2.$$

Нас, естественно, интересует решение $z_0 < z_m$, при котором возможно отражение волны от F-слоя. Предполагая, что $\varepsilon_0 > 0$, т.е. частота радиоволны ω удовлетворяет ограничению

$$\omega < \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{em} / m},$$

найдем ²⁹⁾

$$z_m - z_0 = z_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{a(1 + \varepsilon_0)}} \equiv z_m \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{a\omega_p^2}}. \quad (13.3)$$

²⁹⁾ ω_p есть плазменная частота при максимальном значении электронной концентрации.

С использованием данного выражения нетрудно представить общую зависимость диэлектрической проницаемости ионосферы от высоты в следующем виде:

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e(z)}{m\omega^2} = \varepsilon_0 \left\{ \left(\frac{z_m - z}{z_m - z_0} \right)^2 - 1 \right\}.$$

Таким образом, при $z < z_0$ для входящего в (12.9) интеграла имеем

$$\int_z^{z_0} \sqrt{\varepsilon} dz = \sqrt{\varepsilon_0} (z_m - z_0) \int_1^u \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi.$$

Здесь мы обозначили

$$u = \frac{z_m - z}{z_m - z_0} \geq 1.$$

Так как

$$\int_1^u \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{u^2 - 1} - \operatorname{arch}(u) \right],$$

то согласно общему соотношению (12.9) получим искомую зависимость $E(z)$ в области $z < z_0$:

$$E(z, t) = \frac{2E_0}{\sqrt[4]{\varepsilon_0(u^2 - 1)}} e^{-i\omega t} \times \cos \left(\frac{\omega}{2c} (z_m - z_0) \sqrt{\varepsilon_0} \left[u\sqrt{u^2 - 1} - \operatorname{arch}(u) \right] - \frac{\pi}{4} \right). \quad (13.4)$$

Картина отражения радиоволны от эффективного параболического барьера показана на рис. 8. При $\omega = \omega_p$ в силу (13.3) имеем $z_0 = z_m$, и волна с такой частотой проходит через F-слой. Однако из квантовой механики известно, что коэффициент прохождения параболического барьера при энергии частице, равной высоте барьера, составляет только 50%. Причиной тому является остаточное отражение, которое полностью отсутствует лишь в пределе

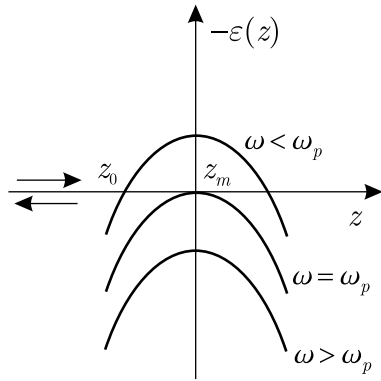


Рис. 8

$\omega \gg \omega_p$. При $\omega < \omega_p$ прохождение волны сквозь F-слой становится экспоненциально малым.

Для применимости полученного выше квазиклассического выражения (13.4) должно выполняться условие достаточной удаленности от точки поворота z_0 : $|z_0 - z| \gg d$. Величина d определяет характерный размер окрестности точки поворота, где асимптотическое разложение непригодно. Если для частоты волны ω имеет место оценка $\omega_p^2 - \omega^2 = O(\omega_p^2)$, т.е. точка z_0 достаточно удалена от z_m (см. (13.3)), то

$$d = \left(\frac{z_m c^2}{\omega_p \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \right)^{1/3}, \quad (13.5)$$

причем $c/\omega_p \ll d \ll z_m$. Для приведенной в условии задачи максимальной концентрации электронов $n_{em} = 7 \cdot 10^5 \text{ 1/см}^3$ (на высоте $z_m \approx 250 \text{ км}$) $c/\omega_p \approx 5 \text{ м}$, и d составляет несколько сот метров в зависимости от частоты волны (при $\omega = 0$ получается $d \approx 200 \text{ м}$). Если же частота волны ω приближается к ω_p (точка поворота подходит к z_m), то возможны различные случаи. Введем параметр

$\delta \ll 1$, характеризующий близость ω к ω_p :

$$\delta = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2}.$$

Оценка для величины d зависит от того, как соотносятся между собой малые параметры δ и $(c/z_m\omega_p) \approx 2.4 \cdot 10^{-5}$. Когда точка z_0 находится еще относительно далеко от z_m , а именно,

$$1 \gg \delta \gg (c/z_m\omega_p)^{2/3} \approx 10^{-3},$$

расстояние d по-прежнему дается формулой (13.5). В случаях же

$$\delta \sim (c/z_m\omega_p)^{2/3} \quad \text{и} \quad \delta \ll (c/z_m\omega_p)^{2/3}$$

имеет место одинаковая оценка

$$d = z_m \left(\frac{c}{z_m\omega_p} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, по мере приближения частоты волны к ω_p размер области, в которой решение (13.4) непригодно, выходит на постоянное значение $d \sim 1$ км, не зависящее от частоты. ³⁰⁾

Задача 14. Сдвиг фазы радиоволны при отражении от ионосферы. Групповое запаздывание.

В условиях двух предыдущих задач определить сдвиг фазы отраженной радиоволны относительно падающей.

Решение. Под сдвигом фаз будем понимать дополнительную фазу, приобретенную отраженной волной к моменту ее выхода из ионосферы на высоте z_1 (где $\varepsilon \approx 1$). Поскольку фазы, приобретаемые волной при прохождении от точки z_1 до точки поворота z_0

³⁰⁾Приведенные выше оценки следуют из условия равенства (по порядку величины) обоих слагаемых исходного уравнения (12.2) в небольшой окрестности точки поворота. Рекомендуем вам самостоятельно их получить.

(где $\varepsilon = 0$) и обратно, равны между собой, суммарный сдвиг фаз в соответствии с (9.9) есть

$$\Delta\varphi = \frac{2\omega}{c} \int_{z_1}^{z_0} \sqrt{\varepsilon(z)} dz - \frac{\pi}{2}. \quad (14.1)$$

В случае линейного изменения электронной концентрации, соответствующего E-слою ионосферы (задача 12), на основании (14.1) имеем

$$\Delta\varphi = \frac{4}{3} u_1^{3/2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3} \frac{\omega l}{c} - \frac{\pi}{2} \gg 1.$$

Первое слагаемое велико по сравнению со вторым, и членом $\pi/2$ можно пренебречь.

Для F-слоя с параболическим изменением концентрации электронов (задача 13) при $\omega < \omega_p$ находим

$$z_m - z_1 = \frac{z_m}{\sqrt{a}}, \quad z_m - z_0 = \frac{z_m}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}.$$

Следовательно,

$$u_1 = \frac{z_m - z_1}{z_m - z_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_p^2}} > 1.$$

Напомним, что плазменная частота $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{em}/m}$ соответствует максимуму электронной концентрации. Подставляя фазу из решения (13.4) в формулу (14.1) (с учетом определения $\varepsilon_0 = \omega_p^2/\omega^2 - 1$), получим искомый сдвиг фаз при отражении от F-слоя ионосферы:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\omega}{c} \frac{z_m}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \left\{ u_1 \sqrt{u_1^2 - 1} - \operatorname{arch} u_1 \right\} - \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{\omega}{c} \frac{z_m}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)}{2\omega\omega_p} \ln \left(\frac{\omega_p + \omega}{\omega_p - \omega} \right) \right\} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Время фазового запаздывания отраженной волны (т.е. время прохождения волны “туда и обратно”) равно

$$\Delta t_{\text{ф}} = \frac{\Delta\varphi}{\omega}.$$

Обратимся теперь к групповому запаздыванию, которое имеет место для некогерентных радиоволн. Представим напряженность электрического поля падающей на ионосферу квазимонохроматической волны в виде

$$E_{\text{пад}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = E_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (14.2)$$

где ω_0 – несущая частота волнового пакета, а $E_0(t)$ – медленная функция времени. Применяя к (14.2) преобразование Фурье по времени, получим

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tau)e^{i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau.$$

Значит, поле квазимонохроматической волны описывается двойным интегралом:

$$E_{\text{пад}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tau)e^{i(\omega-\omega_0)\tau-i\omega t}d\omega d\tau. \quad (14.3)$$

С учетом сдвига фаз $\Delta\varphi(\omega)$ (который есть функция частоты), для отраженной волны имеем

$$E_{\text{отр}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tau)e^{i(\omega-\omega_0)\tau-i\omega t+i\Delta\varphi(\omega)}d\omega d\tau. \quad (14.4)$$

Поскольку функция $E_0(\tau)$ является медленной, результат интегрирования по τ близок к $\delta(\omega - \omega_0)$. Поэтому главный вклад в

интегрирование по ω даст лишь малая окрестность несущей частоты ω_0 . Подставляя тейлоровское разложение

$$\Delta\varphi(\omega) = \Delta\varphi(\omega_0) + \Delta\varphi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots$$

в выражение (14.4), преобразуем его к виду

$$E_{\text{отр}}(t) = e^{-i\omega_0 t + i\Delta\varphi(\omega_0)} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tau) e^{i(\omega - \omega_0)(\tau - t + \Delta\varphi')} d\omega d\tau. \quad (14.5)$$

Так как согласно приведенным выше соотношениям (14.2) и (14.3)

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\tau) e^{i(\omega - \omega_0)(\tau - t)} d\omega d\tau,$$

то (14.5) можно переписать следующим образом:

$$E_{\text{отр}}(t) = e^{-i\omega_0 t + i\Delta\varphi(\omega_0)} E_0(t - \Delta\varphi'(\omega_0)).$$

Итак, отраженный импульс имеет ту же форму, что и падающий, но в результате отражения фаза волны изменилась на $\Delta\varphi(\omega_0)$, а весь импульс как целое (характеризуемый амплитудной функцией $E_0(t)$) стал “отставать” на *время группового запаздывания*

$$\Delta t_{\text{гр}} = \left. \frac{d(\Delta\varphi)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (14.6)$$

Представим выражение для $\Delta t_{\text{гр}}$ в другой форме. Подставляя (14.1) в (14.6), получим

$$\Delta t_{\text{гр}} = \left. \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{2\omega}{c} \int_{z_1}^{z_0} n(z) dz - \frac{\pi}{2} \right\} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

Здесь $n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ – показатель преломления среды (не путайте с концентрацией электронов n_e). Диэлектрическая проницаемость плазмы существенно зависит от частоты волны, поэтому дифференцирование приводит к соотношению

$$\Delta t_{\text{гр}} = \frac{2}{c} \left\{ \int_{z_1}^{z_0} n(z) dz + \omega \int_{z_1}^{z_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} dz \right\} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (14.7)$$

Групповая скорость волнового пакета определяется как

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega=\omega_0},$$

где волновое число $k = n\omega/c$. Следовательно,

$$\frac{1}{v_{\text{гр}}} = \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \left\{ \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right\} \Big|_{\omega=\omega_0}.$$

Сравнивая данное выражение с (14.7), окончательно находим

$$\Delta t_{\text{гр}} = 2 \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{v_{\text{гр}}(z)}.$$

Это подтверждает смысл $v_{\text{гр}}$ как скорости распространения квазимонохроматического волнового пакета в целом. По аналогии можно записать соотношение для времени запаздывания отдельной монохроматической волны с частотой ω :

$$\Delta t_{\text{ф}} = \frac{\Delta \varphi}{\omega} = 2 \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{v_{\text{ф}}(z)}. \quad (14.8)$$

Поскольку $v_{\text{ф}} = \omega/k = c/n$, формулы (14.8) и (14.1) совпадают друг с другом с точностью до пренебрежимо малого слагаемого

$\pi/2$. Возникновение данного различия связано с “квантовыми эффектами”, проявляющимися в небольшой окрестности точки поворота. Фаза $\pi/2$ суть второе приближение в квазиклассическом решении (14.1); она дает поправку к классическому интегралу (14.8).

Задача 15. Отражение высокочастотной радиоволны от ионосферы (теория малых возмущений).

Найти коэффициент слабого отражения высокочастотной радиоволны от ионосферы.

Решение. Под высокочастотной мы будем понимать волну, частота которой удовлетворяет оценке $\omega \gg \omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{em}/m}$. Здесь ω_p – плазменная частота на высоте, где достигается максимальная концентрация электронов n_{em} (в F-слое, см. задачу 13). Для такой волны диэлектрическая проницаемость ионосферы

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{\omega_p^2 n_e(z)}{\omega^2 n_{em}} \quad (15.1)$$

близка к единице. В соответствии с общей формулой (12.9) запишем напряженность электрического поля радиоволны, распространяющейся вдоль вертикальной оси z , в виде

$$E_{\text{пад}}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{n(z)}} \exp\left(\frac{i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta - i\omega t\right), \quad (15.2)$$

где $n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ – показатель преломления среды (не путайте его с концентрацией электронов n_e), а z_1 – нижняя граница ионосферы ($\varepsilon(z_1) = 1$). Поскольку по условию $\omega \gg \omega_p$, асимптотическое решение (15.2) пригодно во всей области $z > z_1$ (иными словами, не существует точки поворота z_0 , в которой $\varepsilon = 0$). Заметим сразу, что функция $n(z)$ является медленной; в силу (15.1) она изменяется на масштабах $L \sim (\omega/\omega_p)l$, где l – характерная

толщина ионосферы ($l \sim 100$ км).³¹⁾ Вместе с тем входящая в (15.2) экспонента суть быстрая функция переменной z ; характерным масштабом ее изменения, очевидно, является длина волны $\lambda \sim c/\omega$.³²⁾ Данное обстоятельство существенно при вычислении производных от $E_{\text{пад}}(z, t)$.

Для отраженной волны решение общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 E = 0 \quad (15.3)$$

представим в форме

$$E_{\text{отр}}(z, t) = E_1(z) \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta - i\omega t\right), \quad (15.4)$$

причем амплитуда слабой отраженной волны удовлетворяет условию $E_1 \ll E_0/\sqrt{n}$. Она также является медленной функцией с характерным масштабом изменения порядка L . Чтобы ее найти, подставим суммарное решение $E = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}$ в (15.3). Так как дифференцирование экспонент дает фактор $\pm i\omega n/c$, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \left[E_0 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \exp\left(\frac{i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta\right) + \\ & + \left[\frac{d^2 E_1}{dz^2} - 2 \frac{i\omega n}{c} \frac{dE_1}{dz} - E_1 \frac{i\omega}{c} \frac{dn}{dz} \right] \times \\ & \times \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta\right) = 0. \end{aligned} \quad (15.5)$$

³¹⁾ В этой оценке мы исходили из квадратичного закона изменения концентрации электронов.

³²⁾ В соответствии с условием задачи $\lambda \ll c/\omega_p \sim 5$ м.

Слагаемые в уравнении (15.5), содержащие E_1 , оцениваются как E_1/L^2 , $E_1/\lambda L$ и $E_1/\lambda L$ соответственно. Таким образом, второй производной $d^2 E_1/dz^2$ с хорошей точностью можно пренебречь, что приводит к более простому дифференциальному уравнению для функции $E_1(z)$:

$$\frac{dE_1}{dz} + \frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} E_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d(E_1 \sqrt{n})}{dz} = \chi(z),$$

где

$$\chi(z) = - \left[\frac{icE_0}{2\omega n} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \exp \left(\frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta \right).$$

Решение этого уравнения есть

$$E_1(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\infty}^z \sqrt{n} \chi(\zeta) d\zeta,$$

так что $E_1(\infty) = 0$ (за ионосферой имеется только прошедшая волна).

Амплитуда отражения на высоте z определяется как

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{E_1 \sqrt{n}}{E_0} \exp \left\{ -\frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n d\zeta \right\} = \\ &= -\frac{ic}{2\omega} \exp \left\{ -\frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n d\zeta \right\} \times \\ &\times \int_{\infty}^z \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^{\zeta} n(\xi) d\xi \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\infty}^z \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^{\zeta} n(\xi) d\xi \right\} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta \right\} - \\
 &- \int_{\infty}^z \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^{\zeta} n(\xi) d\xi \right\} \right) d\zeta.
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при $z \rightarrow \infty$ показатель преломления плавно выходит на значение $n = 1$, так что $dn/dz|_{z=\infty} = 0$. Дифференцирование экспоненты в последнем интеграле дает существенно больший вклад, чем дифференцирование медленной функции $1/\sqrt{n}$. В результате

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta \right\} - \\
 &- \frac{2i\omega}{c} \int_{\infty}^z \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \sqrt{n} \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^{\zeta} n(\xi) d\xi \right\} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Нас, разумеется, интересует амплитуда отражения от всей ионосферы, т.е. значение $R(z_1)$. Поскольку $dn/dz|_{z=z_1} = 0$ (показатель преломления на нижней границе ионосферы плавно стремится к единице), первое слагаемое в I при $z = z_1$ пропадает, и на основании (15.6)

$$R(z_1) = \int_{\infty}^{z_1} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta \right\} dz.$$

Энергетический коэффициент слабого отражения от ионосферы (вероятность отражения фотона) равен

$$w = |R(z_1)|^2 = \left| \int_{z_1}^{\infty} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} \exp \left\{ \frac{2i\omega}{c} \int_{z_1}^z n(\zeta) d\zeta \right\} dz \right|^2. \quad (15.7)$$

Так как функция $n(z)$ не имеет особенностей на вещественной оси и является медленной, величина w экспоненциально мала; ее грубо можно оценить как

$$\exp \left(-\frac{4l\omega}{c} \frac{\omega}{\omega_p} \right),$$

где l – характерное расстояние, на котором изменяется концентрация электронов.

В заключение обратим внимание на еще одно важное обстоятельство, о котором мы умолчали в ходе решения задачи. Асимптотические разложения (15.2) и (15.4), вообще говоря, содержат члены более высоких порядков малости. Поэтому при подстановке этих разложений в уравнение (15.3) следующие приближения теоретически могут дать вклад, совпадающий по порядку величины с относительно малой производной d^2n/dz^2 . Напомним, что именно член со второй производной от n вошел в решение для функции $E_1(z)$. Не получится ли так, что при учете отброшенных слагаемых в асимптотических разложениях результат существенно изменится? Оказывается, что условия $\omega \gg \omega_p$ и $l \gg c/\omega_p$, использованные при решении задачи, позволяют пренебречь членами более высоких порядков малости по сравнению с величинами, входящими в соотношение (15.5). Таким образом, получен правильный результат и учтены только те слагаемые, которые целесообразно удерживать в уравнениях в рамках теории возмущений.

Задача 16. Отражение высокочастотной радиоволны от ионосферы (метод Ландау–Дыхне).

Определить вероятность отражения высокочастотной радиоволны от ионосферы методом Ландау–Дыхне.

Решение. Уравнение Максвелла для напряженности электрического поля монохроматической волны, распространяющейся вертикально вверх, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial z^2} + \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 \hat{E} = 0, \quad (16.1)$$

причем $\hat{E}(z, t) = E(z) \exp(-i\omega t)$, а $n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ – показатель преломления среды. В квазиклассическом приближении, когда $n(z)$ – медленная функция переменной z (т.е. она меняется существенно на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны), решение уравнения (16.1) дается асимптотическим разложением

$$E(z) = \frac{E_0}{\sqrt{n(z)}} \times \left\{ \exp\left(\frac{i\omega}{c} \int_*^z n(\xi) d\xi\right) + R(z) \exp\left(-\frac{i\omega}{c} \int_*^z n(\xi) d\xi\right) \right\}. \quad (16.2)$$

Здесь $R(z)$ – амплитуда отражения волны на высоте z , E_0 – амплитуда падающей волны при $n = 1$ (в нижней части ионосферы); интегрирование ведется от произвольной точки.

Идея метода Ландау–Дыхне состоит в том, чтобы рассмотреть амплитуду падающей волны при $z \rightarrow -\infty$ и аналитически продолжить ее в комплексной плоскости z на значения $z \rightarrow +\infty$. При этом в решении появится экспоненциально малая добавка к падающей волне, представляющая собой отраженную волну. Такая добавка математически возникает из-за наличия особой точки $z = z_0$, в которой $n = 0$. Для высокочастотной ($\omega \gg \omega_p$) радиоволны в силу общей формулы (15.1) точка z_0 , очевидно, лежит в комплексной плоскости на большом расстоянии от вещественной оси.

Раскладывая функцию $\varepsilon(z) = n^2(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = z_0$, получим

$$\varepsilon(z) = \hat{C} \cdot (z - z_0) + \dots$$

Предполагается, что $\hat{C} \neq 0$ и разложение начинается с $(z - z_0)$. Следовательно, для $n(z)$ имеет место разложение

$$n(z) = C\sqrt{z - z_0} (1 + O(z - z_0)) \quad (16.3)$$

и z_0 является точкой корневого ветвления. Точное (не асимптотическое) решение уравнения (16.1) можно представить в форме

$$E(z) = A\sqrt{z - z_0} \cdot H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi \right), \quad (16.4)$$

где $H_{1/3}^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода (с индексом $1/3$). Подобный выбор решения объясняется тем, что при $|z| \rightarrow \infty$ оно переходит в асимптотическое выражение

$$E(z) \sim \frac{1}{\sqrt{n(z)}} \exp \left(\frac{i\omega}{c} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi - \frac{5i\pi}{12} \right), \quad (16.5)$$

по структуре соответствующее падающей волне (см. (16.2)). Подход к точке z_0 и уход от нее при аналитическом продолжении должен идти по линиям, на которых

$$\operatorname{Im} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi = \text{const} \quad \forall z. \quad (16.6)$$

Действительно, квазиклассическое решение (16.2) уравнения (16.1) является асимптотическим в том смысле, что для его применимости требуется условие

$$\left| \frac{i\omega}{c} \int_*^z n(\xi) d\xi \right| \gg 1.$$

Отсюда следует, что интегралы в обеих экспонентах, входящих в (16.2), должны иметь одинаковую мнимую часть; в противном случае экспоненциально малое решение следовало бы выбросить. Это и доказывает “правило обхода” (16.6). В окрестности точки z_0 , где работает Тейлоровское разложение (16.3), соотношение (16.6) сводится к

$$\operatorname{Im} \left[\frac{2C}{3} (z - z_0)^{3/2} \right] = \operatorname{const},$$

что дает три линии, расходящиеся под углом $2\pi/3$ друг относительно друга. Две из них идут соответственно в сторону $z \rightarrow -\infty$ (A) и $z \rightarrow +\infty$ (B) (рис. 9). Переход с линии A на линию B

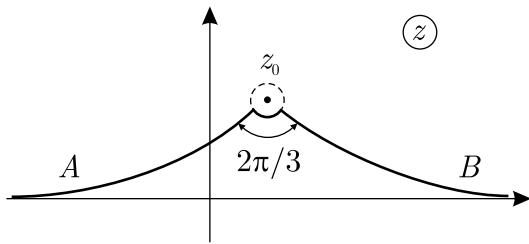


Рис. 9

при аналитическом продолжении функции (16.5) (в окрестности точки z_0) соответствует изменению фазы комплексного значения $z - z_0$ на $2\pi/3$. Поскольку вблизи точки $z = z_0$ аргумент функции Ханкеля в (16.4) есть

$$\zeta(z) = \frac{2C\omega}{3c} (z - z_0)^{3/2},$$

после перехода с одного луча на другой в нем появляется дополнительный множитель $e^{i\pi}$. В соответствии с известным тождеством для функций Ханкеля от комплексной переменной ζ имеем

$$H_{1/3}^{(2)}(e^{i\pi}\zeta) = H_{1/3}^{(2)}(\zeta) + e^{i\pi/3} H_{1/3}^{(1)}(\zeta). \quad (16.7)$$

Таким образом, аналитическое продолжение решения с одного луча на другой приводит к появлению отраженной волны, которая описывается функцией Ханкеля первого рода. Применяя данное соотношение к функции Ханкеля в (16.4) и устремляя $z \rightarrow -\infty$ (по лучу A), получим, что левая часть уравнения (16.7) дает прошедшую волну (поскольку аргумент $e^{i\pi}\zeta(z)$ в функции Ханкеля уходит при этом в сторону $z \rightarrow +\infty$ по лучу B), а правая часть является суперпозицией падающей и отраженной волн:

$$E(z \rightarrow -\infty) = \frac{E_0}{\sqrt{n(z)}} \left[\exp \left(\frac{i\omega}{c} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi - \frac{5i\pi}{12} \right) + e^{i\pi/3} \exp \left(-\frac{i\omega}{c} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi + \frac{5i\pi}{12} \right) \right]. \quad (16.8)$$

Первое слагаемое, очевидно, соответствует падающей волне, а второе – отраженной. Таким образом, амплитуда отражения R , входящая в (16.2), равна

$$R(z) = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = -e^{i\pi/6} \exp \left\{ -\frac{2i\omega}{c} \int_{z_0}^z n(\xi) d\xi \right\}.$$

Возводя модуль от этого выражения в квадрат, найдем экспоненциально малую вероятность отражения высокочастотной радиоволны от ионосферы:

$$w = |R(z)|^2 = \exp \left\{ -\frac{4\omega}{c} \text{Im} \int_z^{z_0} n(\xi) d\xi \right\}. \quad (16.9)$$

В качестве нижнего предела может быть выбрана любая точка на вещественной оси z , поскольку интеграл по вещественной оси не дает вклада в вероятность. Точка ветвления z_0 находится из

условия $n(z_0) = 0$. Если данное уравнение имеет несколько комплексных корней, то из них нужно выбрать корень с минимальной мнимой частью; именно он даст основной вклад в значение w .

Проиллюстрируем общее решение (16.9) на примере F-слоя ионосферы, где концентрация электронов может быть качественно аппроксимирована параболой:

$$n_e = n_{em} [1 - a(z - z_m)^2 / z_m^2].$$

Определяя, как и раньше, плазменную частоту

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{em} / m}$$

в области максимума электронной концентрации, представим диэлектрическую проницаемость плазмы в виде

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e(z)}{m\omega^2} = \varepsilon_0 + a \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{z - z_m}{z_m} \right)^2.$$

Здесь $\varepsilon_0 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 > 0$ при $\omega > \omega_p$. В результате точка z_0 , в которой $\varepsilon = 0$, определяется соотношением

$$z_0 - z_m = +iz_m \frac{\omega}{\omega_p} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{a}}.$$

Из пары корней мы выбрали решение в верхней полуплоскости комплексного z , приводящее к экспоненциально малому значению w . Замена комплексной переменной z на x в соответствии с определением $z - z_m = ix$ дает следующее выражение для показателя преломления:

$$n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} = \sqrt{\varepsilon_0 - a \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{x^2}{z_m^2}}.$$

Интеграл в (16.9), в котором можно положить $z = z_m$ (нижний предел не влияет на результат), приобретает вид

$$\text{Im} \int_{z_m}^{z_0} n(z) dz = \int_0^{x_0} \sqrt{\varepsilon_0 - a \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{x^2}{z_m^2}} dx, \quad x_0 = z_m \frac{\omega}{\omega_p} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{a}}.$$

После замены $x/x_0 = \sin t$ имеем:

$$\operatorname{Im} \int_{z_m}^{z_0} n(z) dz = x_0 \sqrt{\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4} \frac{\omega}{\omega_p} \frac{z_m \varepsilon_0}{\sqrt{a}}.$$

Подставляя этот интеграл в (16.9), найдем вероятность отражения радиоволны от параболического барьера:

$$w = \exp \left\{ -\frac{\pi \omega^2 z_m \varepsilon_0}{c \omega_p \sqrt{a}} \right\} \ll 1. \quad (16.10)$$

Условие пригодности данного решения состоит в том, чтобы показатель экспоненты был велик (по абсолютной величине). Полагая ε_0 , $a \sim 1$, получим критерий применимости формулы (16.10):

$$\frac{\omega}{\omega_p} \frac{\omega z_m}{c} \gg 1. \quad (16.11)$$

На практике $\omega_p z_m / c \gg 1$ с большим запасом ($c/\omega_p \sim 5$ м, а $z_m \sim \sim 250$ км) и неравенство (16.11) заведомо выполняется просто при $\omega > \omega_p$. Иными словами, для применимости формулы (16.10) не обязательно требовать выполнения более жесткого условия $\omega \gg \omega_p$.

Предэкспонента в общем решении (16.9) равна единице. Решение (15.7), полученное в предыдущей задаче с помощью теории возмущений (применимо к слабой отраженной волне), можно привести к тому же показателю экспоненты, что и в (16.9), если использовать метод перевала для входящего в (15.7) интеграла. Однако возникающая при этом предэкспонента отлична от единицы. Правильное значение предэкспоненты в вероятности слабого отражения высокочастотной радиоволны дается именно формулой (16.9), выведенной на основе подхода Ландау–Дыхне. Причиной ошибки в подходе теории возмущений является следующее обстоятельство: если одно подынтегральное выражение мало по сравнению с другим, то это не означает, что то же самое верно и

для интегралов. Именно такая ситуация имеет место в рассматриваемом случае.

Отметим, что для параболической зависимости $n_e(z)$ волновое уравнение (16.1) решается точно; общее решение выражается через функции параболического цилиндра. В случае слабого отражения (когда $\omega > \omega_p$) его вероятность w дается формулой (16.10). При сильном отражении (когда $\omega \leq \omega_p$) вероятность W определяется формулой Кембла, известной из квантовой механики:

$$W = \frac{w}{1+w}, \quad (16.12)$$

где w находится в соответствии с (16.10) (если формально распространить полученный результат на значения $\omega \leq \omega_p$). В частности, при $\omega = \omega_p$ ($\varepsilon_0 = 0$) получим $W = 1/2$ (вероятность отражения при касании потенциального барьера). Если $\omega \ll \omega_p$, то

$$w \approx \exp \left\{ \frac{\pi \omega_p z_m}{c \sqrt{a}} \right\} \gg 1,$$

и $W \rightarrow 1$, как и должно быть. В подобном случае малой величиной является вероятность прохождения радиоволны через параболический барьер:

$$1 - W \approx \exp \left\{ -\frac{\pi \omega_p z_m}{c \sqrt{a}} \right\} \ll 1.$$

Величина

$$-k^2(z) = -\frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2} = -\frac{\varepsilon_0 \omega^2}{c^2} - a \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(\frac{z - z_m}{z_m} \right)^2$$

представляет собой эффективный потенциал эквивалентной задачи квантовой механики с энергией частицы $E = 0$ (рис. 10). В зависимости от знака величины ε_0 имеет место либо надбарьерное (слабое) отражение (при $\varepsilon_0 > 0$), либо подбарьерное (сильное) отражение (при $\varepsilon_0 < 0$). При $\varepsilon_0 = 0$ реализуется промежуточный случай, когда вероятность прохождения составляет 1/2.

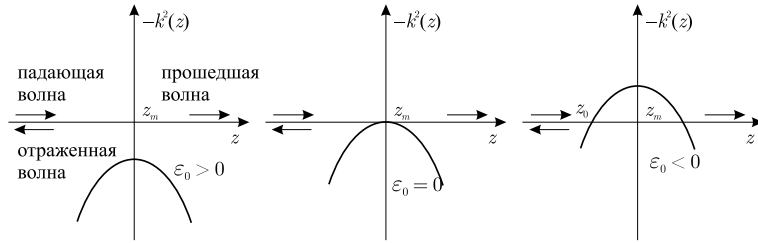


Рис. 10

В заключение заметим, что формула Кембла (16.12) со значением w из общего соотношения (16.9) может использоваться для качественного исследования отражения радиоволны от ионосферы в случае произвольной плавной зависимости $\varepsilon(z)$. С ее помощью можно оценить коэффициент отражения низкочастотной радиоволны от E-слоя, в котором электронная концентрация линейно изменяется с высотой.

Задача 17. Бесстолкновительное затухание продольных плазменных волн на электронах (затухание Ландау).

Рассмотреть бесстолкновительное затухание продольных плазменных волн, обусловленное передачей энергии волны движущимся вместе с ней электронам (затухание Ландау). Сравнить его с другими механизмами затухания в плазме.

Решение. Помимо поперечных электромагнитных волн, в плазме существуют также и продольные волны, связанные с локальными изменениями электронной плотности. Рассмотрим возбуждение *одномерных продольных плазменных волн*, распространяющихся вдоль некоторой оси x . Волна характеризуется возмущением электрического поля $E(x, t)$, которое направлено по оси x ; магнитное поле можно считать равным нулю из-за существенно нерелятивистского характера движения электронов. Предположим, что в точке $x = 0$ в начальный момент времени включается “внешнее

воздействие”:

$$E(0, t) = \begin{cases} E_m \exp(i\omega t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

Задача состоит в исследовании особенностей распространения индуцированной таким образом плазменной волны в пространстве.

Плазменные волны создаются подвижными электронами, а ионы лишь обеспечивают электронейтральность среды. В отсутствие электрического поля скорости теплового движения электронов v подчиняются одномерному распределению Максвелла:

$$f_0(v) = n_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T}} \exp(-m_e v^2 / 2T).$$

Здесь T – электронная температура (измеряемая в энергетических единицах), n_e – число электронов в единице объема плазмы, m_e – масса электрона. Возбуждение слабой плазменной волны приводит к соответствующему малому возмущению функции распределения $f(v, x, t)$; $f \ll f_0$. Уравнение Больцмана для этой функции имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{eE(x, t)}{m_e} \frac{df_0}{dv}. \quad (17.2)$$

В правой части мы ограничились невозмущенной функцией распределения f_0 , поскольку там уже присутствует малое возмущение E (задача является линейной). Кроме того, мы пренебрегли столкновениями электронов между собой, а также с ионами и с нейтральными атомами плазмы. Возмущение функции распределения, очевидно, порождает ненулевую плотность тока

$$j = -e \int_{-\infty}^{\infty} v f dv. \quad (17.3)$$

Величина 17.3 связана с возмущением электрического поля уравнением Максвелла

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (17.4)$$

замыкающим нашу систему.

Сформулированную выше краевую задачу решаем с помощью преобразования Лапласа по времени:

$$f_p(v, x) = \int_0^{\infty} f(v, x, t) e^{-pt} dt.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (17.2), (17.3), (17.4), получим систему

$$\begin{cases} pf_p + v \frac{\partial f_p}{\partial x} = \frac{eE_p}{m_e} \frac{df_0}{dv}, \\ j_p = -e \int_{-\infty}^{\infty} v f_p dv, \\ 4\pi j_p + pE_p = 0. \end{cases} \quad (17.5)$$

Здесь $j_p(x)$ и $E_p(x)$ – соответственно образы функций $j(x, t)$ и $E(x, t)$. Система (17.5) легко сводится к линейному однородному уравнению для $f_p(v, x)$:

$$pf_p + v \frac{\partial f_p}{\partial x} = \frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{df_0}{dv} \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(\xi, x) \xi d\xi. \quad (17.6)$$

Решение ищем в форме

$$f_p(v, x) = F(v) e^{-qx}, \quad (17.7)$$

причем комплексное волновое число q не зависит от v . Подстановка (17.7) в (17.6) дает

$$(p - qv)F = \frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{df_0}{dv} \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \xi d\xi. \quad (17.8)$$

Левая часть (17.8) после умножения на $v/(p - qv)$ и интегрирования по скоростям принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(v)v dv. \quad (17.9)$$

Такой же интеграл содержится и в правой части (17.8), поэтому на него можно сократить. В итоге приходим к *дисперсионному соотношению* для плазменной волны, задающему неявным образом связь между параметрами p и q :

$$p = \frac{4\pi e^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(p - qv)} \frac{df_0}{dv} dv. \quad (17.10)$$

Прежде чем анализировать это дисперсионное соотношение, получим общее решение краевой задачи для возмущения электрического поля. Из уравнения (17.8) легко выразить функцию $F(v)$, которая в соответствии с (17.7) определяет значение f_p :

$$f_p(v, x) = \frac{1}{p(p - qv)} \frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{df_0}{dv} A e^{-qx}.$$

Посредством постоянной A обозначен неизвестный пока интеграл (17.9). Подставляя данное решение в первое уравнение системы (17.5), найдем E_p :

$$E_p(x) = \frac{4\pi e}{p} A e^{-qx}.$$

В точке $x = 0$ функция $E_p(x)$, очевидно, должна совпадать с образом от заданного внешнего воздействия (17.1):

$$E_p(0) = \int_0^{\infty} E(0, t) e^{-pt} dt = E_m \int_0^{\infty} e^{i\omega t - pt} dt = \frac{E_m}{p - i\omega}.$$

В результате окончательное выражение для $E_p(x)$ имеет вид

$$E_p(x) = \frac{E_m}{p - i\omega} e^{-qx}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получим искомое решение:

$$E(x, t) = \frac{E_m}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp[pt - q(p)x]}{(p - i\omega)} dp.$$

Контур интегрирования γ в плоскости комплексного p проходит правее всех особенностей подынтегральной функции (в данном случае полюса $p = i\omega$).

Введем в рассмотрение комплексную фазовую скорость возмущений

$$u = p/q(p) = u' + iu'';$$

она существенно зависит от параметра p . С использованием этого определения перепишем решение следующим образом:

$$E(x, t) = \frac{E_m}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp[p \cdot (t - x/u)]}{(p - i\omega)} dp.$$

При $x < u't$ контур интегрирования замыкается в левой полуплоскости (исходя из условия сходимости интеграла), и интеграл равен вычету в полюсе $p = i\omega$:

$$E(x, t) = E_m \exp[i\omega(t - x/u(i\omega))]. \quad (17.11)$$

Если же $x > u't$, контур замыкается в правой полуплоскости, что приводит к нулевому значению интеграла – волна не успевает дойти до удаленных областей за конечное время. При $t \rightarrow \infty$, однако, решение (17.11) становится пригодным во всем пространстве; в дальнейшем будем иметь дело именно с таким предельным случаем.

Функция (17.11) описывает волну, распространяющуюся как в область положительных, так и отрицательных x с экспоненциальным затуханием. Отделяя в показателе экспоненты действительную и мнимую части, приведем его к виду

$$i\omega \left(t - \frac{u'x}{|u|^2} \right) - \frac{\omega u''x}{|u|^2}.$$

Значениям $u' > 0$ соответствует волна, бегущая в сторону положительных x , и для ее затухания мы необходимо иметь $u'' > 0$. Аналогично, для $u' < 0$ получается $u'' < 0$. Таким образом, в силу симметрии правой и левой половин физического пространства областям $x > 0$ и $x < 0$ отвечают значения фазовой скорости $\pm u$. Здесь и далее под u понимается ветвь дисперсионной зависимости с $u', u'' > 0$.

Рассматриваемая постановка задачи, при которой возмущения имеют вещественную частоту и комплексное волновое число, называется *пространственной*; она подходит для исследования волн, непрерывно генерируемых точечным источником. Возможна также *временная постановка*, когда у волны комплексная частота и вещественное волновое число; именно она была использована Ландау. Такая постановка описывает эволюцию возмущений во времени при условии, что в начальный момент $t = 0$ известно их распределение в пространстве, а при $t > 0$ никаких воздействий на систему не производится. Соответствующая задача относится к типу *начальных задач*, в противоположность решаемой нами *краевой задаче*. Нетрудно доказать, что обе постановки приводят к одному и тому же дисперсионному уравнению (17.10), и поэтому являются абсолютно равнозначными – выбор зависит от конкретного типа физической проблемы.

Теперь можно приступить к анализу дисперсионного уравнения (17.10). В терминах фазовой скорости оно записывается в

форме

$$p^2 = -\frac{4\pi e^2 u}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(v-u)} \frac{df_0}{dv} dv. \quad (17.12)$$

С учетом выражения для функции распределения f_0 имеем

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{\omega_p^2} &= \frac{2u}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{2T}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 \exp(-\alpha v^2)}{v-u} dv = \\ &= -\frac{2u}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{2T}\right)^{3/2} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha v^2)}{v-u} dv. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$ – плазменная частота электронов, а параметр $\alpha = m_e / 2T$. Итак, нужно исследовать интеграл

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha v^2)}{v-u} dv. \quad (17.14)$$

Фазовая скорость u является комплексной величиной, и при интегрировании по вещественной оси в знаменателе не возникает особенности. Разбивая интеграл на два куска, соответствующих положительным и отрицательным значениям скорости, после элементарных преобразований получим

$$I(\alpha) = 2u \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\alpha v^2)}{v^2 - u^2} dv.$$

Если умножить данное выражение на $\exp(\alpha u^2)$ и продифференцировать по параметру α , в правой части окажется стандартный Гауссов интеграл:

$$\frac{d}{d\alpha} [I(\alpha) e^{\alpha u^2}] = -2ue^{\alpha u^2} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha v^2) dv = -ue^{\alpha u^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Приходим к простому дифференциальному уравнению для функции $I(\alpha)$:

$$\frac{dI}{d\alpha} + u^2 I = -u \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Общее решение можно представить в виде

$$I(\alpha) = C e^{-\alpha u^2} - u \sqrt{\pi} e^{-\alpha u^2} \int_0^\alpha \frac{\exp(\xi u^2)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

Константа C , очевидно, равна $I(0)$; в силу (17.14)

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v-u} = \left\{ \begin{array}{ll} i\pi, & u'' > 0 \\ -i\pi, & u'' < 0 \end{array} \right\} = i\pi \operatorname{sign}(u''). \quad (17.15)$$

В результате дисперсионное соотношение (17.13) сводится к

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{\omega_p^2} = u \alpha^{3/2} \times \\ \times \left[i \sqrt{\pi} u^2 \operatorname{sign}(u'') e^{-\alpha u^2} - u^3 \int_0^\alpha \frac{\exp\{(\xi - \alpha)u^2\}}{\sqrt{\xi}} d\xi \right] + \alpha u^2.$$

Заметим, что величина $v_T = \sqrt{2T/m_e} = 1/\sqrt{\alpha}$ суть характерная тепловая скорость электронов (наивероятнейшая скорость в трехмерном тепловом движении). Кроме того, в выражении (17.11) для электрического поля параметр $p = i\omega$. Производя в интеграле замену $\eta = 1 - \xi/\alpha$, в конечном счете получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega^2}{2\omega_p^2} = \bar{u}^4 \int_0^1 \frac{\exp\{-\eta \bar{u}^2\}}{\sqrt{1-\eta}} d\eta - i \sqrt{\pi} \bar{u}^3 \operatorname{sign}(u'') e^{-\bar{u}^2} - \bar{u}^2. \quad (17.16)$$

Здесь $\bar{u} = u/v_T$ – масштабированная фазовая скорость. Уравнение (17.16) определяет неявную зависимость $u(\omega)$. Поскольку в соответствии с условием затухания волны на $\pm\infty$ знаки u' и u'' совпадают ($u'u'' > 0$), (17.16) является четным относительно переменной u . Это означает, что дисперсионному соотношению (17.16), как и должно быть, удовлетворяет пара корней $\pm u$, и в дальнейшем можно рассматривать только “положительную” ветвь, у которой $u', u'' > 0$.

Аналитическое решение уравнения (17.16) удастся получить в двух предельных случаях: $|\bar{u}| \ll 1$ и $|\bar{u}| \gg 1$. В первом из них интеграл является величиной порядка единицы, в чем нетрудно убедиться, раскладывая экспоненту в ряд Тейлора. Таким образом, в главном приближении уравнение (17.16) вырождается в

$$2\bar{u}^2 = -(\omega/\omega_p)^2, \quad \omega/\omega_p \ll 1,$$

откуда вытекает чисто мнимое решение для волнового числа:

$$k = \pm i\omega_p/v_T.$$

Это соответствует экспоненциальному затуханию возмущений на расстояниях, много меньших длины волны, как и должно быть в низкочастотном пределе $\omega \ll \omega_p$.

Теперь обратимся ко второму предельному случаю. При $|\bar{u}| \gg 1$ основной вклад в интеграл дает небольшая окрестность нижнего предела, где $\eta \ll 1$. Раскладывая знаменатель в ряд Тейлора, получим главные члены асимптотики интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\exp\{-\eta\bar{u}^2\}}{\sqrt{1-\eta}} d\eta = \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}\eta + \frac{3}{8}\eta^2 + \dots\right) \exp\{-\eta\bar{u}^2\} d\eta = \\ &= \frac{1}{\bar{u}^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{u}^4} + \frac{3}{4} \frac{1}{\bar{u}^6} + O\left(\frac{1}{\bar{u}^8}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли слагаемыми порядка $(1/\bar{u}^2)e^{-\bar{u}^2}$; даже после умножения на \bar{u}^4 они все равно оказываются много меньше члена $i\sqrt{\pi}\bar{u}^3 \text{sign}(u'')e^{-\bar{u}^2}$ в уравнении (17.16). Последнее в главном приближении имеет вид

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{u}^2} - 2i\sqrt{\pi}\bar{u}^3 \text{sign}(u'')e^{-\bar{u}^2}. \quad (17.17)$$

В силу оценки $|\bar{u}| \gg 1$ данный предельный случай соответствует частотам возмущений, близким к плазменной частоте ω_p (хотя и немного превосходящим ее). Мнимая часть фазовой скорости, очевидно, существенно меньше вещественной, поскольку определяется экспоненциально малым членом с мнимой единицей в уравнении (17.17); то же самое, естественно, справедливо и для мнимой части волнового числа. В результате находим следующий закон дисперсии $u'(\omega)$:

$$u'(\omega) = \frac{v_T}{2} \sqrt{\frac{3\omega_p}{\omega - \omega_p}} \gg v_T, \quad \omega \rightarrow \omega_p + 0.$$

Так как $u = \omega/k$, где $k = k' + ik''$ – комплексное волновое число, то последнее выражение можно преобразовать к зависимости $k'(\omega)$:

$$\frac{\omega}{\omega_p} = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{k'v_T}{\omega_p} \right)^2.$$

Таким образом, мы имеем дело с длинноволновым приближением:

$$k' \ll \frac{\omega_p}{v_T}.$$

Для мнимой части фазовой скорости получается уравнение

$$u'' = -v_T \left(\frac{u'}{v_T} \right)^6 \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \text{sign}(u'') \exp \{ -(u'/v_T)^2 \},$$

которое не имеет решений.

Чтобы выйти из затруднения, Ландау предложил изменить способ интегрирования по скоростям в дисперсионном соотношении (17.12). Как было показано выше, дисперсионное уравнение содержит интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v - u}.$$

Полюс $v = u$ лежит над вещественной осью (мы рассматриваем дисперсионную ветвь $u', u'' > 0$). Если провести контур интегрирования не по вещественной оси, как это делалось прежде, а в комплексной плоскости v выше полюса (см. рис. 11), то интеграл по такому контуру будет равен сумме интеграла по вещественной оси ($i\pi$) и вычета в полюсе.

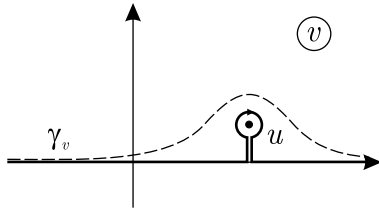


Рис. 11

Последний есть $-2\pi i$ из-за отрицательного направления обхода. В итоге контурный интеграл равен $-i\pi$, и при подстановке его вместо интеграла по вещественной оси в выражение (17.15), для константы C имеем решение

$$C = \int_{\gamma_v} \frac{dv}{v - u} = -i\pi$$

вне зависимости от знака u'' . Это никак не влияет на вещественную часть фазовой скорости, однако исправляет выражение для

мнимой части:

$$u'' = v_T \left(\frac{u'}{v_T} \right)^6 \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \exp \{ -(u'/v_T)^2 \}. \quad (17.18)$$

В случае, когда $u' < 0$ (волна распространяется в сторону $x < 0$), контур интегрирования нужно провести ниже полюса, что дает отрицательное значение для u'' , равное по модулю (17.18). Таким образом, правило обхода Ландау не только обеспечивает разрешимость дисперсионного уравнения, но и приводит к выбору затухающего решения из двух ветвей дисперсионной зависимости ($u'' > 0$ при $x > 0$, и $u'' < 0$ при $x < 0$).

Из уравнения (17.18) легко найти, что мнимая часть волнового числа зависит от частоты следующим образом:

$$\begin{aligned} |k''(\omega)| &= \frac{\omega}{v_T} \left(\frac{u'}{v_T} \right)^4 \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \exp \{ -(u'/v_T)^2 \} \equiv \\ &\equiv \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{\omega_p}{v_T} \right) \left(\frac{\omega_p}{\omega - \omega_p} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{3}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega - \omega_p} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Она определяет экспоненциально малый декремент бесстолкновительного затухания плазменных волн (Л.Д. Ландау, 1946). Затухание связано с передачей энергии волны электронам, тепловая скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны u' . Однако из-за того, что в рассматриваемом случае u' существенно превышает характерную тепловую скорость v_T , доля таких “резонансных” электронов пропорциональна малому фактору $\exp \{ -(u'/v_T)^2 \}$, и затухание также экспоненциально мало.

В заключение приведем числовые данные, касающиеся распространения электронных плазменных волн в ионосфере на высоте 100 км. Концентрация электронов и ионов на этой высоте составляет $n_e = 10^5 \text{ см}^{-3}$, температура электронов $T = 200 \text{ К}$, а концентрация нейтральных молекул $n_a = 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Частота волны с точностью до малых слагаемых порядка $(k'v_T/\omega_p)^2$ равна плазменной частоте $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e} = 1.8 \cdot 10^7 \text{ 1/с}$.

Помимо бесстолкновительного затухания Ландау, в плазме есть еще два механизма затухания, обусловленные столкновениями электронов с нейтральными атомами и с положительными ионами. Рассмотрим сначала столкновения с нейтральными атомами, которые представим шариками с радиусом $a = 10^{-8}$ см. Кинетическая энергия электрона при указанной выше температуре есть $E = 3T/2 = 300$ К. Волновое число, соответствующее такой энергии, в атомной системе единиц равно $k = \sqrt{2E} = 0.00435$ ае. Следовательно, $ka \ll 1$. При выполнении этого условия сечение рассеяния медленного электрона на нейтральном атоме как на непроницаемом шарике просто совпадает с его геометрическим сечением: $\sigma = \pi a^2$. Частота столкновений электрона с нейтральными атомами, таким образом, равна

$$\nu_{ea} = n_a \sigma v_T = n_a \sigma \sqrt{2E/m_e} = 3 \cdot 10^4 \text{ 1/с} \ll \omega_p.$$

Теперь вычислим частоту ν_{ei} столкновений электронов с атомарными ионами. По известной формуле физической кинетики, вытекающей из формулы Резерфорда для кулоновского рассеяния, имеем

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}e^4 n_e}{3\sqrt{m_e} T_e^{3/2}} \ln \Lambda, \quad \Lambda = \frac{T_e^{3/2}}{e^3 \sqrt{4\pi n_e}}.$$

Подставляя числовые данные, находим значение $\nu_{ei} = 1.3 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$. Видно что рассеяние на ионах происходит существенно реже, чем на нейтральных атомах ионосферы, и им можно пренебречь.

При каких длинах плазменных волн затухание Ландау будет определяющим, т.е. превысит затухание из-за столкновений электронов с нейтральными атомами? Для ответа на этот вопрос нужно сравнить характерную длину поглощения энергии волны резонансными электронами при затухании Ландау с длиной свободного пробега электронов при рассеянии. Первая, очевидно, есть $1/k''$, в то время как вторая составляет $1/n_a \sigma \approx 320$ см. Затухание Ландау будет преобладать над рассеянием на нейтральных

атомах, если $1/k'' < 1/n_a\sigma$. Оба эти эффекта сравнимы по величине, когда $1/k'' = 1/n_a\sigma$, т.е.

$$n_a\sigma v_T = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}\omega_p \left(\frac{\omega_p}{k'v_T}\right)^4 \exp\left\{-\left(\frac{\omega_p}{k'v_T}\right)^2\right\}. \quad (17.19)$$

С учетом числовых оценок приходим к следующему условию:

$$0.0014 = x^2 \exp(-x), \quad x = (\omega_p/k'v_T)^2. \quad (17.20)$$

Данное трансцендентное уравнение имеет два положительных корня; нас интересует больший из них, так как соотношение (17.19) применимо только к длинноволновым колебаниям с малым волновым числом (частота близка к плазменной). Численное решение уравнения (17.20) дает корень $x = 11.4467$, а вместе с ним и волновое число $k' \approx 0.67 \text{ см}^{-1}$; соответствующая длина волны равна $\lambda = 2\pi/k' \approx 9.4 \text{ см}$. При длинах волн, меньших этого значения, затухание Ландау будет доминирующим.

Тем не менее в рамках длинноволнового приближения существует нижнее ограничение на длину волны. В самом деле, частота плазменной волны ω близка плазменной частоте ω_p при условии $k'v_T/\omega_p \ll 1$. Переходя к менее строгому неравенству $k'v_T/\omega_p < 1$, получим грубую оценку для длины волны: $\lambda > 0.9 \text{ см}$. Таким образом, у плазменных колебаний с частотами $\omega \sim \omega_p$ затухание Ландау является определяющим в диапазоне длин электронных плазменных волн от 1 до 10 см.

Отметим, что при затухании Ландау энтропия электронного газа не изменяется, и процесс является обратимым (тепловое движение электронов теоретически способно накачивать волну; такая накачка возможна, если невозмущенная функция распределения удовлетворяет условию $df_0/dv|_{v=u'} > 0$). Рассеяние же электронов на нейтральных атомах есть существенно необратимый процесс – атомы не могут передавать волне свою энергию. В этом принципиальное отличие затухания Ландау от всех других механизмов поглощения плазменных волн.

Глава 4

Взаимодействие солнечного ветра с магнитным полем Земли

Задача 18. Оценки для верхней и нижней границ магнитосферы Земли.

Оценить верхнюю и нижнюю границы магнитосферы Земли со стороны Солнца (магнитосфера – это область космического пространства, определяемая взаимодействием солнечного ветра с магнитным полем Земли).

Решение. *Солнечный ветер* представляет собой поток разреженной плазмы, состоящей в основном из протонов и электронов. Верхняя граница *магнитосферы* определяется условием равенства кинематического давления этого потока давлению магнитного поля Земли. Первое, естественно, создается только протонами и равно

$$p = n_p m_p v^2. \quad (18.1)$$

Здесь n_p – концентрация протонов в солнечном ветре (в районе земной орбиты она составляет 5 1/см^3), $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ – масса протона, $v = 4 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ – его характерная скорость. Подставляя данные значения в (18.1), для давления солнечного ветра получим оценку

$$p = 1.35 \cdot 10^{-8} \text{ г/см} \cdot \text{с}^2.$$

На верхней границе магнитосферы Земли (т.н. *магнитопаузе*)

давление p должно уравниваться магнитным давлением

$$p_m = \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad (18.2)$$

где \mathbf{B} – индукция магнитного поля Земли на искомом расстоянии R от ее центра, соответствующем верхней границе. В экваториальной плоскости индукция направлена перпендикулярно этой плоскости и равна по модулю $B = M/R^3$ (M – магнитный момент Земли). Если B_0 – индукция поля у поверхности Земли (на экваторе), то

$$B = B_0 \left(\frac{R_\oplus}{R} \right)^3.$$

Здесь $R_\oplus = 6380$ км – радиус Земли, $B_0 = 0.31$ Гаусс. Приравнявая (18.1) и (18.2), имеем

$$\frac{R}{R_\oplus} = \left(\frac{B_0^2}{8\pi p} \right)^{1/6}.$$

Подстановка числовых значений приводит к оценке $R/R_\oplus \approx 8$, которая неплохо согласуется с экспериментальными данными ($R_{\text{exp}}/R_\oplus = 10.8$).

Теперь обратимся к нижней границе. Влияние магнитного поля Земли на движение протонов солнечного ветра исчезает, когда частота столкновений протонов с атомами атмосферы становится больше ларморовой частоты ω_B их вращения в магнитном поле. Ввиду малости толщины атмосферы по сравнению с радиусом Земли, индукция поля в ней может считаться постоянной и равной B_0 (в экваториальной плоскости). Таким образом, на нижней границе магнитосферы получаем условие

$$n_a v \cdot \pi a^2 = \frac{eB_0}{m_p c} \equiv \omega_B. \quad (18.3)$$

Здесь v – скорость протона, $a \approx 10^{-13}$ см – его радиус, n_a – атмосферная концентрация на искомой высоте. С учетом числовых

данных находим для ларморовой частоты значение $3 \cdot 10^3$ 1/с, и в силу (18.3) пороговая концентрация составляет $n_a = 2.5 \cdot 10^{11}$ 1/см³. Это соответствует высоте порядка 130 км над поверхностью Земли.

Задача 19. Движение протонов вдоль силовых линий магнитного поля Земли. Полярные сияния.

Показать, что период колебаний захваченных магнитным полем Земли протонов солнечного ветра вдоль магнитных силовых линий слабо зависит от фитч-угла (угла между вектором скорости протона и вектором магнитного поля Земли).

Решение. Пусть фитч-угол протона на экваторе, т.е. угол между направлением скорости протона на экваторе и направлением магнитного поля (перпендикулярного плоскости экватора), равен α (рис. 12). Полную скорость протона обозначим через v – она сохраняется в неоднородном магнитном поле.

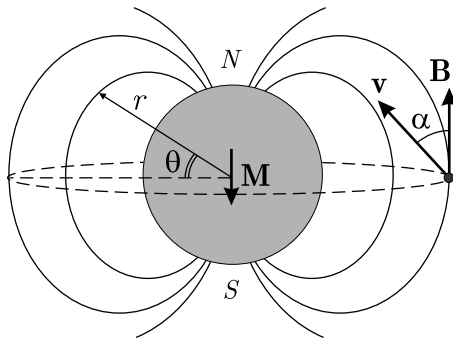


Рис. 12

Пренебрегая медленным дрейфом протона в направлении изменения долготы, связанным с неоднородностью магнитного поля Земли (см. задачу 20), можно сказать, что его движение складывается из двух составляющих: быстрого вращения вокруг сило-

вых линий магнитного поля с ларморовой частотой и движения вдоль силовых линий. Если v_n – проекция скорости протона на направление, перпендикулярное магнитному полю (плоскость ларморовского вращения), то в ходе движения вдоль силовых линий остается неизменной величина v_n^2/B , называемая адиабатическим инвариантом (см. [10]). Из постоянства отношения v_n^2/B нетрудно заключить, что возрастание индукции поля B по мере движения протона к полюсу сопровождается ростом поперечной компоненты скорости v_n и, следовательно, уменьшением продольной компоненты скорости v_t . В точке поворота v_t обращается в нуль, и $v_n = v$.

Определим компоненты магнитного поля Земли на широте θ (угол θ отсчитывается от экватора в сторону северного полюса, см. рис. 12).³³⁾ Вводя магнитный потенциал соотношением $\mathbf{B} = -\nabla\psi$, запишем для него классическое решение:

$$\psi = (\mathbf{M}\mathbf{r})/r^3.$$

Здесь \mathbf{M} – магнитный момент Земли,³⁴⁾ а r – расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки пространства. Взятие градиента от ψ дает значения индукции:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r} - Mr^2}{r^5}.$$

Для проекций индукции магнитного поля в сферической системе координат с осью, направленной вдоль магнитного момента, получим

$$B_r = -\frac{2M \sin \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{M \cos \theta}{r^3}. \quad (19.1)$$

Полное магнитное поле на широте θ по модулю равно

$$B = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}. \quad (19.2)$$

³³⁾ В дальнейших рассуждениях предполагаем, что магнитные полюса Земли совпадают с обычными полюсами.

³⁴⁾ Вектор \mathbf{M} направлен от северного полюса к южному.

Посмотрим, как магнитное поле изменяется вдоль силовых линий. Поскольку на силовой линии по определению

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta},$$

с учетом (19.1) имеет место уравнение

$$\frac{dr}{r} = -2 \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta},$$

решение которого есть

$$r = r_0 \cos^2 \theta.$$

Здесь r_0 – расстояние до рассматриваемой силовой линии от центра Земли в плоскости экватора. В соответствии с (19.2) магнитное поле на силовой линии зависит от широты следующим образом:

$$B = \frac{M}{r_0^3 \cos^6 \theta} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}. \quad (19.3)$$

Оно монотонно возрастает при движении от экватора к полюсам.

Условие поворота дрейфующего протона на некоторой широте θ_{\max} можно представить в виде

$$\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{B(\theta = 0)} = \frac{v^2}{B(\theta_{\max})}.$$

Подставляя сюда $B(\theta)$ из (19.3), получим неявное выражение для угла поворота θ_{\max} :

$$\sin^2 \alpha = \frac{\cos^6 \theta_{\max}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_{\max}}}. \quad (19.4)$$

По мере увеличения фитч-угла α предельный угол θ_{\max} монотонно убывает до нуля (когда $\alpha \rightarrow \pi/2$).

Период колебаний протона вдоль силовой линии магнитного поля представим в форме интеграла

$$T = 4 \int_0^L \frac{dl}{v_t}.$$

Здесь dl – элемент дуги силовой линии, а L – расстояние, проходимое протоном до точки поворота от экваториальной плоскости. Так как $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2 d\theta^2$, то

$$\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r_0^2 \cos^4 \theta + 4r_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta.$$

Следовательно,

$$\frac{dl}{d\theta} = r_0 \cos \theta \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}.$$

Продольную скорость v_t можно выразить через известную из условия $v_n^2/B = \text{const}$ поперечную скорость v_n :

$$v_t^2 = v^2 - v_n^2 = v^2 - v^2 \sin^2 \alpha \frac{B(\theta)}{B(\theta=0)}.$$

С учетом (19.3) имеем

$$v_t = v \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}{\cos^6 \theta}\right)^{1/2}.$$

Тогда выражение для периода колебаний сводится к интегралу по широте θ :

$$T = 4 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{dl}{d\theta} \frac{d\theta}{v_t(\theta)}.$$

Подставляя полученные выражения для $dl/d\theta$ и v_t , найдем

$$T = \frac{4r_0}{v} f(\alpha),$$

$$f(\alpha) = \int_0^{\theta_{\max}(\alpha)} \frac{\cos^4 \theta \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\cos^6 \theta - \sin^2 \alpha \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}} d\theta. \quad (19.5)$$

Период колебаний является монотонно убывающей функцией фитч-угла α , в чем нетрудно убедиться непосредственно из (19.5). Ниже будет показано, что функция $f(\alpha)$ близка к единице во всем диапазоне значений α . Для силовой линии, проходящей на расстоянии $r_0 = 10R_{\oplus} \sim 6 \cdot 10^4$ км в плоскости экватора (R_{\oplus} – радиус Земли), и скорости протона $v \approx 4 \cdot 10^7$ см/с, характерной для солнечного ветра, справедлива оценка $T \sim 10$ мин.

Интеграл (19.5) легко вычисляется в двух предельных случаях. Если $\alpha = 0$, т.е. протон на экваторе движется вдоль силовых линий магнитного поля (перпендикулярно экваториальной плоскости), то

$$f(\alpha \rightarrow 0) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta} d\theta = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.38.$$

Напротив, если $\alpha \rightarrow \pi/2$, т.е. протон на экваторе почти не имеет скорости вдоль силовой линии, то после замены переменной $x = \sin \theta$ получим

$$f(\alpha) = \int_0^{x_{\max}} \sqrt{\frac{1 + 3x^2}{1 - \sin^2 \alpha \sqrt{1 + 3x^2}/(1 - x^2)^3}} dx.$$

Из (19.4) несложно найти, что в случае $\alpha \rightarrow \pi/2$

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \alpha \ll 1,$$

и подынтегральное выражение можно разложить в ряд Тейлора по степеням $x \ll 1$:

$$f(\alpha) \approx \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 \alpha - 9x^2/2}}.$$

Вычисление этого элементарного интеграла дает

$$f(\alpha \rightarrow \pi/2) = \pi/3\sqrt{2} \approx 0.74.$$

Приходим к заключению, что во всем интервале изменения фитч-угла от 0 до $\pi/2$ период колебаний T меняется менее чем в два раза. Здесь, конечно, нужно иметь в виду, что если угол α строго равен $\pi/2$, то протон постоянно находится в экваториальной плоскости и никаких колебаний не происходит ($T = \infty$). Однако даже бесконечно малого возмущения ε к значению $\alpha = \pi/2$ оказывается достаточным для вывода протона из экваториальной плоскости. В этом смысле движение протона в плоскости экватора, рассмотренное подробно в задаче 20, является неустойчивым. Обобщенная зависимость периода колебаний от фитч-угла содержит δ -функцию:

$$T(\alpha) = T_0 \delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{4r_0}{v} f(\alpha).$$

Здесь T_0 – некоторая нормировочная постоянная.

Относительно движения протонов вдоль силовых линий магнитного поля следует сделать важное замечание: если фитч-угол близок к нулю, то протоны могут достигать атмосферы Земли. В самом деле, на основании формулы (19.4) при $\alpha \rightarrow 0$ имеем

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - (\alpha\sqrt{2})^{1/3} + \dots$$

Подставляя это значение в уравнение силовых линий, найдем

$$r(\theta_{\max}) \approx r_0 \cdot (\alpha\sqrt{2})^{2/3}.$$

Каким бы большим ни было начальное расстояние r_0 до рассматриваемой силовой линии, при малых α она достигает поверхности Земли (и атмосферы). Попадая в атмосферу, протоны испытывают рассеяние (преимущественно на нейтральных атомах) и не возвращаются обратно вдоль силовой линии магнитного поля. Именно из-за рассеяния быстрых заряженных частиц космического излучения в Земной атмосфере в районе полюсов возникают хорошо известные *полярные сияния*.

Полагая в последней формуле $r = R_{\oplus}$ ввиду малости толщины атмосферы по сравнению с радиусом Земли, получим оценку для критического значения фитч-угла, при котором начинается захват протонов атмосферой:

$$\alpha_{\text{крит}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{R_{\oplus}}{r_0} \right)^{3/2}.$$

Все протоны с меньшими фитч-углами (на заданном начальном расстоянии r_0 от центра Земли) поглотятся в атмосфере.

Отметим, что найденные в задаче период колебаний T и критический угол $\alpha_{\text{крит}}$ не зависят от магнитного момента Земли. На результат влияет лишь начальное положение r_0 протона в экваториальной плоскости, а также его полная скорость v (или энергия $E = m_p v^2/2$).

Задача 20. Дрейф протонов в экваториальной плоскости Земли.

Найти период дрейфа протона солнечного ветра в экваториальной плоскости Земли, перпендикулярной силовым линиям ее магнитного поля. Энергия протона равна E , а радиус орбиты дрейфа составляет r_0 .

Решение. Если вектор скорости протона, входящего в магнитосферу в районе экваториальной плоскости Земли, строго параллелен ей, то при дальнейшем движении он будет оставаться в этой

плоскости. Ввиду слабой неоднородности магнитного поля Земли в радиальном направлении (в плоскости экватора), протон начнет совершать медленное дрейфовое движение по круговой орбите с некоторым радиусом r_0 , одновременно вращаясь вокруг силовых линий магнитного поля.

Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \frac{Gm_{\oplus}m}{r^2} \mathbf{e}_y,$$

где m – масса протона, e – его заряд, G – гравитационная постоянная, m_{\oplus} – масса Земли, вектор $\mathbf{e}_y = \mathbf{r}/r$ задает радиальное направление; он перпендикулярен орбите дрейфа. Индукция магнитного поля Земли в экваториальной плоскости получается из выражений (19.1) при $\theta = 0$:

$$\mathbf{B} = \frac{M}{r^3} \mathbf{e}_z; \quad (20.1)$$

здесь M – магнитный момент Земли, а \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости экватора в сторону северного полюса. Введем также единичный вектор $\mathbf{e}_x = [\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ в направлении касательной к орбите дрейфа с востока на запад (рис. 13), дополняющий вектора \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z до правой тройки.

Протон вращается со скоростью \mathbf{v}_{\perp} вокруг силовых линий магнитного поля по окружности радиуса ρ и при этом движется по орбите со скоростью $\mathbf{v}_{\partial} = \mathbf{e}_x v_{\partial} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}$; очевидно, что $v_{\partial} \ll v_{\perp}$. Так как, исходя из здравого смысла, $\rho \ll r_0$, то индукцию магнитного поля и гравитационную силу можно разложить в ряд Тейлора. В дальнейшем мы ограничимся только линейным членом разложения, пропорциональным малому смещению протона $y = r - r_0$ в радиальном направлении относительно орбиты (рис. 13):

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}(r_0) + \left. \frac{d\mathbf{B}}{dr} \right|_{r_0} \cdot y + \dots, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r_0^3} y + \dots$$

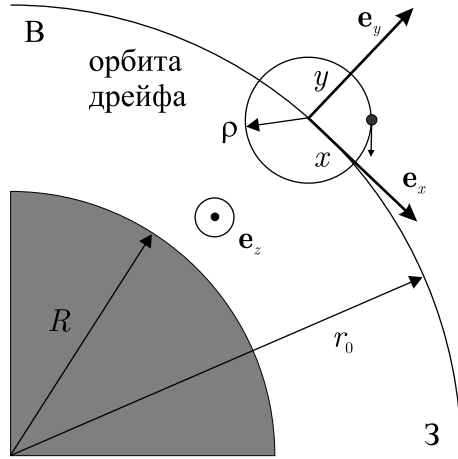


Рис. 13

С учетом выражения (20.1) для индукции имеем:

$$B(r) = B_0 - \frac{3M}{r_0^4}y + \dots, \quad B_0 = \frac{M}{r_0^3}.$$

Подставляя данные разложения в уравнение движения и отбрасывая квадратичные члены, найдем:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_\partial}{dt} &= \frac{eB_0}{c}[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{e}_z] + \frac{eB_0}{c}[\mathbf{v}_\partial, \mathbf{e}_z] - \\ &- \frac{3eM}{cr_0^4}y[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{e}_z] - \frac{Gm_\oplus m}{r_0^2}\mathbf{e}_y + \frac{2Gm_\oplus m}{r_0^3}\mathbf{e}_y y. \end{aligned} \quad (20.2)$$

В главном приближении получается уравнение

$$m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{eB_0}{c}[\mathbf{v}_\perp, \mathbf{e}_z], \quad (20.3)$$

которое описывает быстрое вращение протона вокруг силовых линий магнитного поля с ларморовой частотой $\omega = eB_0/mc$. Влия-

нием гравитации на это движение мы пренебрегли, поскольку отношение гравитационной силы к магнитной характеризуется малым параметром

$$\frac{\rho}{r_0} \frac{R_{\oplus}}{r_0} \left(\frac{v_I}{v} \right)^2 \ll 1.$$

Здесь $v_I \approx 8$ км/с – первая космическая скорость, а $R_{\oplus} = 6380$ км – радиус Земли.³⁵⁾ В пределах магнитосферы, где актуальна задача о дрейфе, отношение r_0/R_{\oplus} не больше 10 (см. задачу 18), и данный множитель в последующих рассуждениях мы учитывать не будем (он только усиливает неравенство). Первая космическая скорость на несколько порядков меньше типичной скорости v протона в солнечном ветре; мало также и отношение ρ/r_0 .

Определяя смещения x и y протона относительно дрейфующего центра (в направлении векторов \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y , см. рис. 13), представим решение уравнения (20.3) в виде

$$x(t) = \rho \cos(\omega t), \quad y(t) = -\rho \sin(\omega t).$$

При наблюдении с северного полюса протон вращается по часовой стрелке (рис. 13); скорость быстрого вращения есть

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} = \omega [\mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x].$$

Заметим, что смещение y уже входит явным образом в уравнение (20.2), характеризуя малые отклонения полей от их значений на орбите протона.

Следующее приближение дает уравнение для дрейфового движения:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}_{\partial}}{dt} = & \frac{eB_0}{c} [\mathbf{v}_{\partial}, \mathbf{e}_z] - \frac{3eM}{cr_0^4} y [\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{e}_z] - \\ & - \frac{Gm_{\oplus}m}{r_0^2} \mathbf{e}_y + \frac{2Gm_{\oplus}m}{r_0^3} \mathbf{e}_y y. \end{aligned} \quad (20.4)$$

³⁵⁾ Рекомендуем вам самостоятельно получить такую оценку.

Отношение гравитационной силы к присутствующим в (20.4) возмущениям магнитной силы равно $(v_I/v)^2$. Значит, гравитацией, как правило, можно пренебречь и для дрейфового движения, однако пока оставим ее в наших рассуждениях. При этом нужно понимать, что гравитационные слагаемые в ответе будут иметь смысл лишь для очень медленных протонов со скоростями $v \sim v_I$. В случае же $v \gg v_I$ отброшенные нами квадратичные слагаемые магнитной силы превосходят гравитационные, когда

$$\frac{\rho}{r_0} > \left(\frac{v_I}{v}\right)^2,$$

что соответствует скоростям протонов

$$v > (\omega r_0 v_I^2)^{1/3}.$$

В данном скоростном диапазоне основные поправки к периоду дрейфа будут обусловлены магнитным полем, а не гравитацией.

Решение для модуля скорости дрейфа v_∂ , очевидно, испытывает колебания с частотой ω , так как правая часть уравнения (20.4) содержит быстроосциллирующие функции x и y . Однако на временах порядка периода дрейфа $T = 2\pi/\Omega$ ($\Omega \ll \omega$ – угловая скорость дрейфа) подобного рода колебания несущественны, и нужно работать со скоростью, усредненной по периоду быстрого вращения $T_\perp = 2\pi/\omega$:

$$\langle v_\partial(t) \rangle = \frac{1}{T_\perp} \int_t^{t+T_\perp} v_\partial(\tau) d\tau.$$

Представляя производную от скорости дрейфа в форме

$$\frac{d\mathbf{v}_\partial}{dt} = \mathbf{e}_x \frac{dv_\partial}{dt} - \mathbf{e}_y \Omega v_\partial,$$

применим к (20.4) операцию усреднения:

$$\mathbf{e}_y m \Omega \langle v_\partial \rangle = \mathbf{e}_y \frac{eB_0}{c} \langle v_\partial \rangle - \frac{3eM}{cr_0^4} \omega \{ \mathbf{e}_y \langle y^2 \rangle - \mathbf{e}_x \langle xy \rangle \} + \frac{Gm_\oplus m}{r_0^2} \mathbf{e}_y.$$

Здесь учтено, что $\langle dv_{\partial}/dt \rangle = 0$, $\langle y \rangle = 0$. Усреднение билинейных слагаемых дает

$$\langle y^2 \rangle = \rho^2/2, \quad \langle xy \rangle = 0.$$

В результате для средней скорости дрейфа получается уравнение

$$\langle v_{\partial} \rangle (\omega - \Omega) = \frac{3}{2} \frac{\rho}{r_0} \omega^2 \rho - \frac{Gm_{\oplus}}{r_0^2},$$

которое сводится к

$$\begin{aligned} \langle v_{\partial} \rangle = \frac{\rho}{r_0} \omega \rho \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{v_I}{\omega \rho} \right)^2 \right] + \frac{\Omega}{\omega} \frac{\rho}{r_0} \omega \rho \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{v_I}{\omega \rho} \right)^2 \right] + \\ + O \left(\left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (20.5)$$

Здесь $\Omega = \langle v_{\partial} \rangle / r_0$. Конкретный вид решения для $\langle v_{\partial} \rangle$ зависит от соотношения между гравитацией и магнитным полем, характеризующегося слагаемым $(v_I/\omega\rho)^2$. В дальнейшем, однако, мы пренебрежем гравитацией, что можно делать для большинства протонов солнечного ветра со скоростями $\omega\rho \approx v \sim 10^2 - 10^3$ км/с. При этом в главном приближении имеем

$$\langle v_{\partial} \rangle = \frac{3}{2} \frac{\rho}{r_0} \omega \rho \approx \frac{3}{2} \frac{v^2}{\omega r_0} = \frac{3cE}{eM} r_0^2,$$

где E – кинетическая энергия протона. Дрейф положительно заряженных частиц происходит с востока на запад, о чем свидетельствует положительное значение $\langle v_{\partial} \rangle$. Угловая скорость дрейфа

$$\Omega = \frac{3}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \omega.$$

Видно, что слагаемые с Ω/ω в уравнении (20.5) пропорциональны $(\rho/r_0)^3$, то есть они заметно меньше отброшенных нами ранее

квадратичных по ρ/r_0 членов, связанных с магнитным полем. Для нахождения поправки к скорости дрейфа, таким образом, нужно удерживать в исходном уравнении члены порядка $(\rho/r_0)^2$.

В заключение приведем числовые данные. У поверхности Земли (в плоскости экватора) ларморова частота равна $\omega_{\oplus} = 3 \cdot 10^3$ 1/с; следовательно, на орбите радиусом r_0

$$\omega = \omega_{\oplus} \left(\frac{R_{\oplus}}{r_0} \right)^3.$$

Для отношения ρ/r_0 , входящего в решение, получаем

$$\frac{\rho}{r_0} \approx \frac{v}{\omega r_0} = \frac{v}{\omega_{\oplus} R_{\oplus}} \left(\frac{r_0}{R_{\oplus}} \right)^2.$$

Типичное значение скорости протонов солнечного ветра составляет $v = 4 \cdot 10^2$ км/с. Если $r_0 = 2R_{\oplus}$, то $\rho/r_0 \approx 8.3 \cdot 10^{-5}$. Значит, период дрейфа протонов в экваториальной плоскости, оказавшихся на орбите с удвоенным радиусом Земли, равен $1.9 \cdot 10^5$ с (около 53 часов).

Список литературы

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 1992.
3. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967.
4. *Джэксон Дж.* Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.
5. *Дорофеев Е.А., Крайнов В.П.* Электродинамика сплошных сред. – М.: МФТИ, 1999. – 160 с.
6. *Лайонс Л., Уильямс Д.* Физика магнитосферы. – М.: Мир, 1987.
7. *Сергеев В.А., Цыганенко Н.А.* Магнитосфера Земли. – М.: Наука, 1980.
8. *Смирнов Б.М.* Физика слабоионизованного газа. – М.: Наука, 1988.
9. *Фомичев С.В., Толоконников С.В.* Элементы макроскопической электродинамики. – М.: МФТИ, 2004, 48 с.
10. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. – М.: МФТИ, 2004, 25 с.