Московский Физико-Технический Институт

(*государственный университет*)

Кафедра Философии

Реферат по Истории Науки

Развитие аналитической теории чисел со времен античности и до наших дней: музыка простых чисел

Д.В. Юмашев

Москва, 2007

Введение

В истории науки есть по крайней мере одна глава, связывающая воедино труды величайших ученых со времен античности и до наших дней. Глава эта посвящена *простым числам* – атомам арифметики. За, казалось бы, безобидным названием этих чисел, которые делятся только на единицу и на самих себя, скрывается одна из сложнейших проблем, когда либо возникавших перед исследователями-математиками.

Со времен Евклида математики пытаются разглядеть некоторую закономерность в распределении простых чисел на числовой оси. Если посмотреть на наименьшие простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,[1]) и т.д., то вряд ли можно усмотреть какую-либо логику в их расположении на числовой оси. И такая логика становится все более и более эфемерной по мере того, как мы продолжаем углубляться в числовые дебри. Создается впечатление, что простые числа появляются там, где им вздумается; они могут располагаются то друг рядом с другом (два соседних нечетных числа), то на довольно больших расстояниях. Естественно возникает вопрос: неужели распределение кирпичиков в фундаменте математики не поддается описанию? Неужели в основе математики, науки исключительно структурированной и упорядоченной, лежит своеобразный хаос? Подобно Эйнштейну, долгое время не принимавшему квантовой механики из-за вероятностного характера ее законов, многие естествоиспытатели не соглашались с возможной непредсказуемостью в поведении простых чисел.

Развитие теории простых чисел в некотором смысле отражает эволюцию методов математического познания: от выдвижения эмпирических (интуитивных) гипотез и такой же эмпирической их проверки до предоставления доказательного обоснования, возводящего утверждения в ранг теорем. Принцип логически обоснованного доказательства утверждений был впервые открыт мыслителями древней Греции. Он позволяет перейти из области человеческих интуиции и фантазии в пространство истинного, объективного знания, отражающего устройство природы.

В IV веке до н.э. греческий математик Евклид доказал два основных утверждения из теории простых чисел:

1. Каждое целое число может быть единственным образом разложено на простые множители (*основная теорема арифметики*);

2. Множество простых чисел бесконечно (т.е. не существует конечного набора простых чисел).

Однако на протяжении двух последующих тысячелетий математикам не удавалось получить существенных результатов, которые приоткрыли бы тайну в распределении атомов арифметики на числовой оси. Только в начале XIX века великий немецкий математик Карл Гаусс сделал первый шаг в решении этой проблемы. Он нашел функцию, позволяющую оценить количество простых чисел на отрезке от 2 до произвольного x. Тем не менее, функция Гаусса всего лишь дает оценку общего

[1]) Число 1 по соглашению состоит на особом положении: оно не является ни простым, ни составным.

количества заключенных на $[2, x]$ простых чисел, не позволяя определить положение каждого такого числа в отдельности; она обладает погрешностью. 50 лет спустя, в 1859 г., немецким математиком Бернхардом Риманом была выдвинута гипотеза о том, как природа компенсирует разницу между истинным количеством простых чисел на отрезке $[2, x]$ и оценкой Гаусса. Это был прорыв; Риманом впервые была написана формула, существенно приближающая нас к абсолютно точному предсказанию положения *каждого* простого числа.

Ограниченность современного знания о структуре "пульса" самого сердца математики – простых чисел – частично связана с недоказанностью так называемой *гипотезы Римана.* Подобно знаменитой теореме (гипотезе) Ферма о неразрешимости определенного класса алгебраических уравнений в целых числах, не дававшей покоя математикам в течение трех столетий, гипотеза Римана уже полтора века является непреступным бастионом на пути к нашему пониманию устройства мира простых чисел. Теорема Ферма служит примером того, как доказательство весьма тривиального по свой сути утверждения, записываемого с помощью всего десятка математических символов, способно обогатить математику. Доказательство этой теоремы, данное в 1995 г. А. Вайлсом, занимает около 100 страниц и служит своеобразным итогом развития математики XX века. Быть может, ответ на вопрос о справедливости гипотезы Римана прольет свет на многие нерешенные до сего дня проблемы, и в первую очередь на многочисленные недоказанные утверждения, касающиеся самих простых чисел. Более того, в истории науки достаточно случаев, когда движение к одной цели приводило к достижению других вершин, в то время как исходная цель иногда оставалась не достигнутой.

Продвижение к доказательству утверждения, по словам английского математика Г. Харди, сродни восхождению альпинистов на непокоренную вершину. Однако не все вершины в математическом мире могут быть достигнуты – об этом свидетельствует теорема австрийского логика Курта Геделя, доказанная им в 1931 г. Согласно Геделю, в рамках любой системы аксиом, обладающих свойством непротиворечивости, невозможно доказательно обосновать все без исключения гипотезы – даже те, которые являются верными. Весьма иронично, что доказательство самого утверждения Геделя "о недоказуемости" оказалось возможным в системе аксиом математической логики. Какое значение имеет теорема Геделя с точки зрения попыток обосновать гипотезу Римана? Возможна ситуация, когда данная гипотеза верна, но существующая математика не в состоянии предоставить доказательное подтверждение ее истинности.

Подобная ситуация сродни принципу неопределенности Гейзенберга, лежащему в основе физики микромира. Невозможность на нашем "макроскопическом" языке объяснять явления квантовых масштабов, равно как и ограниченность человеческого языка при суждении об этических ценностях (Витгенштейн, "Лекция об этике"), в точности напоминает утверждение Геделя, относящееся к математике. Вероятно, в этом проявляется "несовершенство" человеческого познания окружающего мира, которое имеет глубокие метафизические предпосылки. Как бы то ни было, вопрос о структуре множества простых чисел до сих пор остается открытым.

1. Основная теорема арифметики

Древнегреческий математик Евклид впервые использовал принцип логического доказательства для того, чтобы пролить свет на простые числа, которые были известны еще задолго до него. Высказанные им утверждения можно сформулировать следующим образом:

1. *Всякое натуральное число представимо произведением определенного набора простых чисел, причем такое представление единственно.*

2. *Не существует наибольшего простого числа; иными словами, множество простых чисел бесконечно.*

В самой структуре этих предложений усматривается качественно новый подход к научному познанию, рождением которого мы обязаны мыслителям древней Греции. С точки зрения архаичных предшественников современной науки, существовавших во всех древних цивилизациях, подобные вопросы лишены всякого смысла. Действительно, как может человек проверить какое-либо утверждение для всех без исключения чисел? Греки же изменили постановку вопроса: нельзя ли доказать выдвинутую гипотезу для *произвольного* числа N? Отказавшись от совершенно немыслимого эмпирического перебора чисел, математики времен античности сделали первый шаг к абстрактному мышлению, лежащему в основе современной науки.

Первое из приведенных выше двух фундаментальных утверждений носит название *основной теоремы арифметики*. Приведу доказательство первой его части о возможности разложить всякое натуральное число на простые множители, чтобы проиллюстрировать силу изобретенных древними греками методов логического обоснования.

Предположим, что до некоторого произвольного натурального числа N наше утверждение доказано, то есть все без исключения числа $2, \ldots, N-1$ тем или иным образом раскладывается в произведение простых множителей. Если число N – простое, то для него утверждение доказано. Но не может ли получиться так, что N не является простым, и в тоже время не содержит простых множителей? Иными словами, возможна ли еще одна альтернатива при построении натуральных чисел? Вот основной пункт, на который требуется дать отрицательный ответ, дабы доказать исходное утверждение. Гипотеза о существовании числа, не являющегося ни простым, ни составным, суть утверждение, противоположное основной теореме арифметики. Если опровергнуть эту гипотезу, наша теорема будет доказана. В подобных рассуждениях усматривается еще одно замечательное изобретение греков: если мы не в состоянии подтвердить правильность некоторого утверждения имеющимися средствами, то, быть может, окажется возможным опровергнуть противоположное ему утверждение? Так родился принцип *доказательства от противного*, широко используемый в математике.

Итак, пусть число N является “особенным” в указанном выше смысле. Поскольку в таком случае N не может быть простым, оно с необходимостью содержит по крайней мере два делителя A и B, отличных от единицы и меньших, чем N. Но тогда эти делители обязаны лежать где-то внутри отрезка $2, \ldots, N-1$, для всех чисел которого теорема доказана. Таким образом, числа A и B содержат простые множители, а это означает, что и кратное им N также является произведением простых чисел. Вывод: противоположное утверждение опровергнуто и основная теорема арифметики доказана для всех натуральных чисел, так как число N в доказательстве предполагалось произвольным.

Похожим образом доказывается второе из сформулированных в начале этого параграфа утверждений: как бы далеко мы ни углублялись в дебри на числовой оси, простые числа никогда не закончатся. Предположим противное: пусть существует только конечный набор простых чисел; обозначим их как p_1, p_2, ..., p_n. Если перемножить все числа из данного набора и прибавить к произведению единицу, мы получим число

$$N = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1,$$

которое, очевидно, не делится нацело ни на одно из указанных простых чисел. Но это означает, что либо число N само является простым, либо состоит из простых множителей, отличных от p_1, p_2, ..., p_n – альтернативы быть не может в силу основной теоремы арифметики. Оба вывода опровергают наше предположение о существовании ограниченного набора простых чисел, доказывая тем самым исходное утверждение.

Теоремы Евклида открыли новую страницу в истории арифметики. Они продемонстрировали возможности логического доказательства и дали первую надежду на раскрытие глубоких тайн, скрывающихся за кажущейся простотой простых чисел. Однако для того, чтобы хоть немного продвинуться в постижении этих тайн, математикам потребовалось более двух тысячелетий. Немецкий математик Гаусс в самом начале XIX века сумел разглядеть связь между распределением простых чисел и таблицей натуральных логарифмов. Правда за 150 лет до этого открытия на свет появились гипотезы в отношении простых чисел, долгое время не дававшие покоя математикам.

В XVII веке французский математик П. Ферма и монах М. Мерсенн, состоявший в переписке с ведущими европейскими учеными того времени, предложили несколько эмпирических формул, якобы позволяющих предсказать положение отдельных простых чисел. Формулы эти, несмотря на довольно простую структуру, приводят к громоздким выкладкам, и их пригодность не могла быть подтверждена для сколь-нибудь значительного количества простых чисел. Однако главная проблема в том, что Ферма и Мерсенн не смогли предоставить доказательства для своих гипотез, и поэтому их формулы не дают ничего нового для понимания основ арифметики. В сущности, математическое доказательство избавляет нас от необходимости экспериментально проверять утверждения, и это становится особенно важным, когда объектом утверждения является неограниченное множество элементов, например множество простых чисел.

2. Связь между простыми числами и натуральными логарифмами

Чтобы продвинуться в понимании простых чисел, потребовались интуиция и математическое чутье величайшего немецкого математика Карла Гаусса. Гаусс уже в возрасте трех лет обнаружил небывалые математические способности, а в 10 лет поразил своего учителя в гимназии вычислением суммы 100 членов арифметической прогрессии $\{a_n\} = 1,\, 2,\, 3,\, ... \equiv n$. Вместо того, чтобы терпеливо просуммировать все натуральные числа от 1 до 100, как это начали делать остальные ученики, Гаусс за полминуты написал формулу для суммы: $S = N(N{+}1)/2$, и, подставив в нее значение $N = 100$, получил требуемый результат: $S = 5050$. Какой логикой руководствовался десятилетний математический вундеркинд? Рассуждения были очень простые. Если представить каждое число соответствующим количеством зернышек, выложенных в ряд начиная от левого края страницы, и поместить числа последовательности одно под другим, то получится треугольник. Его площадь, очевидно, и есть сумма арифметической прогрессии, но как найти эту площадь? Гаусс предложил к полученному треугольнику добавить точно такой же треугольник так, чтобы вместе они образовали прямоугольную фигуру со сторонами N и $N+1$. Площадь такой фигуры равна $N(N+1)$, а значит сумма N элементов прогрессии есть $S = N(N+1)/2$. Данная формула получена для произвольного значения N, и поэтому она справедлива для всех натуральных чисел.

Несколько лет спустя на очередной день рождения Гаусс получил от отца подарок – вновь изданные таблицы логарифмов. По иронии судьбы в самом конце этого сборника были приведены также таблицы известных к тому времени простых чисел, что позволило Гауссу впоследствии установить замечательную связь между простыми числами и логарифмами. Однако до этого судьбоносного открытия девятнадцатилетний математик доказал важную теорему, касающуюся построения правильных фигур на плоскости с помощью циркуля и линейки. И в решение подобной геометрической задачи, сформулированной еще Евклидом, неожиданно вмешались простые числа. Гауссу удалось доказать, что если n-ое число Ферма $F_n = 2^{2^n}+1$ – простое, то теоретически возможно построить правильный F_n-угольник, используя только циркуль и линейку. По мнению самого Ферма, все его числа F_n должны были быть простыми, однако на сегодняшний день установлена “простота” только первых пяти таких чисел с $n = 0 \div 4$. Числа Ферма очень быстро возрастают с увеличением n, так что уже при $n = 5 \quad F_n = 4294967297$; это первое число Ферма, которое является составным. Понятно, что подобного рода числа не могли быть подвергнуты проверке на простоту средствами, доступными в середине XVII века. Наибольшее известное на сегодняшний день число Ферма, являющееся простым, есть $F_4 = 65537$. В соответствии с теоремой, доказанной Гауссом, можно построить правильный 65537-угольник элементарными средствами, правда вряд ли кто-нибудь когда-нибудь захочет подвергнуть это утверждение практической проверке.

Изучая таблицы простых чисел в книжке с логарифмами, Гаусс, как и многие его предшественники, пытался разглядеть закономерность в расположении этих необычных чисел на числовой оси. Гениальность его догадки заключается в том, чтобы посмотреть на кажущуюся безнадежной проблему под другим углом зрения. Если не удается точно предсказать, является ли произвольное натуральное число N простым, то, быть может, получится *оценить*, сколько в среднем простых чисел находятся на отрезке $[2, x]$ (здесь x – любое действительное число больше 2)? Слово "оценить" в данной постановке вопроса принципиально, поскольку знание *истинного* количества простых чисел на отрезке $[2, x]$, которое мы обозначим как $\pi(x)$, позволяет точно сказать, является ли произвольное целое число N простым. Действительно, если для любого положительного $\varepsilon \ll 1$ функция $\pi(x)$ увеличилась на 1 при переходе от $x = N - \varepsilon$ к $x = N + \varepsilon$ (т.е. $\pi(N + \varepsilon) = 1 + \pi(N - \varepsilon)$), то число N – простое; если же $\pi(N + \varepsilon) = \pi(N - \varepsilon)$, то N не является простым и может быть разложено на множители. Именно точная зависимость $\pi(x)$, имеющая вид ступенчатой функции, всегда служила заветной целью для математиков. И оценочный подход Гаусса дал первое существенное приближение к этой зависимости.

Выписывая количество простых чисел на отрезках $[2, 10^2]$, $[2, 10^3]$, $[2, 10^4]$, $[2, 10^5]$, Гаусс также посчитал, сколько целых чисел *в среднем* нужно пропустить, прежде чем среди них появится простое число (иными словами, он нашел *среднее расстояние* между соседними простыми числами, основываясь на имевшихся таблицах). Сделать это довольно просто: достаточно поделить количество всех чисел на отрезке $[2, N]$, равное $N - 1$, на количество простых чисел $\pi(N)$, находящихся на этом отрезке. Последнее было известно Гауссу из таблиц простых чисел, приведенных в его книге по логарифмам. Глядя на результаты своих вычислений, Гаусс не мог не заметить потрясающую закономерность: при увеличении длины отрезка N на порядок, т.е. при увеличении показателя степени в выражении $N = 10^n$ на единицу, среднее расстояние между простыми числами все время увеличивается на $\Delta = 2.3$. Но ведь это в точности напоминает поведение логарифмической функции при увеличении аргумента на порядок! В самом деле, $\log_a 10^n = n \cdot \log_a 10 \equiv n \cdot \Delta$, т.е. с увеличением показателя n на единицу логарифм от 10^n каждый раз увеличивается на одно и то же число $\Delta = \log_a 10$. Гауссу оставалось только найти основание логарифма a, которое бы давало значение $\Delta = 2.3$. Используя имевшиеся под рукой логарифмические таблицы, он без труда установил, что $a = e = 2.7182...$ – знаменитое число "e".

Таким образом, экспериментальным путем Гауссом было показано, что среднее расстояние $\rho(x)$ между двумя соседними простыми числами в окрестности числа x равно натуральному логарифму от x: $\rho(x) = \ln x$. Как ни вспомнить здесь фразу древнегреческого философа Гераклита: "концы сходятся"... Под зорким взглядом Гаусса слились воедино на первый взгляд никак не связанные между собой таблицы логарифмов и простых чисел. Сам автор этого потрясающего открытия записал тогда в дневнике: "вы не представляете, какая необыкновенная красота содержится в таблице логарифмов!"

Следующий шаг, который естественным образом последовал за этим открытием, заключался в использовании предсказания Гаусса об изменении среднего расстояния между простыми числами по мере углубления в числовые дебри для оценки их среднего количества на отрезке $[2, x]$. Обратная к $\rho(x)$ величина $q(x)$ есть вероятность того, что каждое новое исследуемое нами число в окрестности x будет простым. Тогда на малом отрезке длиной dx будет располагаться в среднем $q \cdot dx$ простых чисел. В результате среднее количество простых чисел на отрезке $[2, x]$, обозначенное Гауссом как $\mathrm{Li}(x)$, дается интегралом:

$$\mathrm{Li}(x) = \int\limits_2^x q(\xi) d\xi = \int\limits_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} \,.$$

Функция $\mathrm{Li}(x)$ носит название логарифмического интеграла и дает довольно неплохое приближение к истинной функции распределения простых чисел $\pi(x)$. Логарифмический интеграл является гладкой функцией, которая в области доступных нашему экспериментальному наблюдению простых чисел всегда проходит несколько выше "лестницы" $\pi(x)$. Поскольку Гаусс не предоставил какого-либо логического доказательства тому, что его интеграл действительно приближает истинное количество простых чисел, это утверждение долгое время имело статус гипотезы. Только полвека спустя немецкий математик Бернхард Риман дал ему первое серьезное обоснование.

3. Распределения простых чисел и дзета-функция Римана

Свою докторскую диссертацию, успешно защищенную в 1851 г., Риман посвятил разработке теории аналитических функций. Несмотря на то, что комплексные числа были известны уже довольно давно (многие математики, тем не менее, отказывались их принимать), функции комплексного переменного вошли в математику лишь в 30-х годах XIX века. И сразу же обнаружили ряд замечательных свойств, одним из которых является *аналитичность*. Применяя аппарат теории аналитических функций, математики (здесь нельзя не упомянуть заслуги О. Коши) смогли решить множество доселе неразрешимых проблем, к примеру найти предельные значение интегралов Френеля:

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,.$$

Важным свойством большинства аналитических функций является возможность *аналитически продолжить* их на более широкую область определения в комплексной плоскости. Так, Г-функция Эйлера (принимающая в целых точках значение факториала) вводится как интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \,,$$

определенный только при $\mathrm{Re}(s) > 0$. Однако известное соотношение

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \,,$$

которое доказывается сперва для вещественных значений $s \in (0, 1)$, позволяет продолжить ее на всю оставшуюся комплексную плоскость s (т.е. определить значения $\Gamma(s)$ при $\mathrm{Re}(s) \leqslant 0$).

Вдохновленный успехами новой теории, Риман решил рассмотреть введенную еще Эйлером функцию

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

как функцию комплексной переменной s. Поскольку входящий в определение ζ-функции ряд сходится лишь при $\mathrm{Re}(s) > 1$, возникла необходимость аналитически продолжить ее в оставшуюся часть комплексной плоскости. Это оказалось возможным в силу функционального уравнения

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\,, \tag{1}$$

полученного Риманом (данный вывод занимает всего пол-страницы в знаменитой работе “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse” за 1859 г., и является примером необыкновенной математической интуиции Римана). Оно напоминает аналогичное соотношение для Г-функции и обнаруживает симметрию обеих частей относительно прямой $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Используя аппарат теории аналитических функций, Риман установил ряд свойств ζ-функции, доопределенной таким способом на всю комплексную плоскость (впоследствии эта функция получила его имя). Он обнаружил, что $\zeta(s)$ имеет единственный полюс при $s = 1$, соответствующий сумме расходящегося гармонического ряда, а также нули при целых отрицательных $s = -2, -4, \ldots$ (эти нули соответствуют полюсам Г-функции, и поэтому они были названы *тривиальными*).

Самое замечательное свойство, однако, скрывалось в окрестности “линии симметрии” $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ для уравнения (1). Оценочные выкладки показали, что ζ-функция имеет ряд нулей на данной прямой; эти нули симметричны относительно вещественной оси, а их положения не выражаются в явном виде (в отличие от тривиальных нулей), из-за чего они были названы *нетривиальными* нулями. Риман предположил, что таких нулей у ζ-функции бесконечно много, и что *все* они лежат строго на прямой $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, получившей название *критической линии*. Как раз это утверждение и известно в математике как *гипотеза Римана*, и вот уже полтора столетия оно противостоит всем попыткам его доказать или опровергнуть. Именно, остается не опровергнутой возможность того, что найдется нетривиальный нуль, лежащий не на критической прямой (тем не менее, было доказано, что все нули обязаны находиться где-то в пределах полосы $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$). На сегодняшний день доказано лишь то, что на критической линии находится бесконечно много нетривиальных нулей, причем они составляют как минимум 40 % от их общего числа, и что среди нетривиальных нулей бесконечно много имеют иррациональную мнимую координату.

Каково значение ζ-функции и ее нулей для теории чисел? Поистине огромное. Множество теоретико-числовых результатов доказываются в предположении о справедливости гипотезы Римана. Ситуация, когда все нули ζ-функции лежат на одной прямой, выглядит наиболее “гармоничной” с точки зрения математики. И несмотря на то, что подобные рассуждения лишены какой бы то ни было доказательной силы, большинство математиков верят в справедливость гипотезы, что вполне объяснимо.

С древних времен ученые интуитивно пытались разглядеть в природе простые закономерности, найти порядок, а не хаос. Так Иоганн Кеплер при исследовании астрономических таблиц исходил из как можно более простого уравнения для траекторий планет и в итоге пришел к эллиптическим орбитам. Сходным образом Эйнштейн при выводе уравнений *общей теории относительности* искал наиболее простую связь между тензором кривизны пространства и распределением масс.

Однако остается еще один важный вопрос: позволяет ли гипотеза Римана найти положения всех простых чисел, т.е. выразить $\pi(x)$ через известные аналитические функции (не содержащие простых чисел)? И тут математика дает отрицательный ответ. Собственно, этот вопрос до сих пор приводит в недоумение многих математиков, поэтому здесь уместно прояснить ситуацию.

Реальность такова, что нам удается написать выражение не для самой $\pi(x)$, а для “модифицированной” функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} \equiv \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots ,$$

представляющая собой сумму количества простых чисел на отрезке $[0, x]$ (собственно $\pi(x)$), половины от количества квадратов простых чисел, заключенных на том же отрезке ($\frac{1}{2}\pi(x^{1/2})$), трети от количества кубов простых чисел и т.д. Риман сумел найти связь между определенной таким образом функцией и ζ-функцией (данный вывод опять являет собой пример его гениальной интуиции):

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_0^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx \,.$$

Применяя к обеим частям равенства обратное преобразование Меллина, он выразил $f(x)$ через известные аналитические функции:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\ln \zeta(s)}{s} x^s ds \,;$$

интеграл берется по вертикальной прямой в комплексной плоскости s, пересекающей вещественную ось в точке $a > 1$. Этот интеграл в конечном итоге сводится к сумме вычетов по всем полюсам, соответствующим нетривиальным нулям ζ-функции ρ_k, что приводит к следующей формуле:

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho_k} \mathrm{Li}(x^{\rho_k}) - \ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi^2 - 1)\ln \xi} \,, \quad x \geqslant 2 \,. \tag{2}$$

При вычислении $\mathrm{Li}(x^{\rho_k})$, разумеется, используется аналитическое продолжение логарифмического интеграла $\mathrm{Li}(z)$ в область комплексных z.

Итак, функция $f(x)$ определяется однозначным образом по указанным выше формулам. Но можно ли перейти от нее обратно к $\pi(x)$, не опираясь на знание простых чисел? Оказывается, что нет, поскольку $\pi(x)$ выражается через $f(x)$ преобразованием Мебиуса:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\mu(n)} \frac{f(x^{1/n})}{n} \,,$$

в котором $\mu(n)$ суть количество простых множителей в натуральном числе n. Вот так математика в очередной раз ограничивает наше знание о мире простых чисел. Вполне возможно, что для нахождения всех без исключения простых чисел потребуются еще не существующие на сегодняшний день методы. Или же $\pi(x)$ сама по себе является фундаментальной математической функцией, принципиально не поддающейся описанию в существующей системе аксиом математики. Так постоянная Планка $\hbar$ или гравитационная постоянная G не выражаются через какие-бы то ни было физические константы, а их значения определяются экспериментально.

А что же гипотеза Римана? Оказывается, что она эквивалентна лишь утверждению касательно асимптотики $\pi(x)$ при больших значениях аргумента:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\ln x)\,, \quad x \to \infty\,.$$

В теории чисел доказывается, что это выражение дает наиболее точную оценку (из всех возможных) для погрешности логарифмического интеграла при аппроксимации им функции $\pi(x)$. Однако с нахождением положений всех простых чисел гипотеза Римана никак не связана, и в этом нужно отдавать себе отчет. Здесь уместно заметить, что относительная погрешность логарифмического интеграла, определяемая как

$$\Delta(x) = \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x}\,,$$

стремится к нулю при $x \to \infty$ вне зависимости от того, верна гипотеза Римана или нет. Данное утверждение носит название *теоремы о простых числах*; оно было впервые доказано Адамаром и Пуассоном в 1896 г. с использованием комплексного анализа (без предположения о верности гипотезы Римана). В 1949 г. норвежским математиком А. Селбергом было получено другое доказательство, ограничивающееся лишь средствами элементарной алгебры.

Формула (2), несмотря на ее бессмысленность с точки зрения нахождения точного закона в распределении простых чисел, дает косвенный аргумент в пользу того, что все нетривиальные нули ζ-функции ρ_k должны лежать на одной прямой. В самом деле, показатель роста k-ой гармоники $\mathrm{Li}(x^{\rho_k})$ из ряда, входящего в (2), определяется вещественной частью нуля ρ_k. Если эти вещественные части различны (т.е. не все нули лежат на критической прямой), то гармоники будут давать различный вклад в сумму в зависимости от значения x, что не вяжется с физической и математической интуицией. В физике существует множество примеров, когда гармоники ряда дают одинаковый вклад вне зависимости от значения аргумента, т.е. в общей "симфонии" слышны все инструменты (ни один из них не выделяется).[2]) Сходным образом, в "музыке" простых чисел вклад каждого нуля ζ-функции сродни звуку нового инструмента, и выделять (или заглушать) какие-либо инструменты не представляется разумным с точки зрения устройства природы.

---

[2]) Данный факт связан с тем обстоятельством, что многие физические проблемы сводятся к краевым задачам для самосопряженного оператора. У такого оператора все собственные значения *вещественные*, и они обычно играют роль частот в гармониках, из которых состоит общее решение. В итоге все гармоники имеют одинаковый показатель роста, в простейшем случае нулевой, и отдельные из них не выделяются из общей картины.

Подобные аргументы, тем не менее, лишены доказательной силы. Строгое обоснование гипотезы Римана так и остается открытой проблемой, равно как и нахождение точного закона в распределении простых чисел $\pi(x)$.

Заключение

Теория чисел – поистине увлекательная глава в истории науки. Зародившись еще во времена античности, она и по сей день обнаруживает в себе нерешенные проблемы. В центре ее внимания – простые числа, атомы арифметики, которые распределены на числовой оси по некоторому закону $\pi(x)$. Поиском этого закона занимались математики из разных стран и в разные исторические эпохи, однако первые существенные результаты были получены лишь в XIX веке. Наблюдательность великого немецкого математика Карла Гаусса позволила ему эмпирическим путем установить связь между распределением простых чисел и натуральными логарифмами.

Полвека спустя Бернхард Риман благодаря своей необычайной интуиции, а также глубокому знанию теории аналитических функций (разработанной во многом его усилиями), сумел подвести под утверждения Гаусса доказательную основу. Более того, Риман продвинулся еще дальше и сделал попытку перейти от оценочной функции Гаусса к точной ступенчатой функции, которая давала бы положения всех без исключения простых чисел. Попытка эта потерпела неудачу, хотя полученные Риманом формулы намного приблизили нас к пониманию того, как ведут себя простые числа. Распределение простых чисел обнаружило аналогию с некой “симфонией”, где звук каждого инструмента представляет собой вклад от очередного нуля ζ-функции – центрального объекта в рассуждениях Римана. Попутно Риман выдвинул гипотезу относительно положения нулей ζ-функции, предположив, что все они располагаются на одной прямой. Данная гипотеза впоследствии получила его имя, и вот уже полтора века она противостоит всем попыткам ее доказать или опровергнуть. По иронии судьбы гипотеза Римана оказалась чрезвычайно плодотворной для теории чисел в целом; многие теоретико-числовые результаты были доказаны лишь в предположении об истинности данной гипотезы.

Попытки доказать гипотезу Римана уже дали неплохой урожай, и можно только догадываться, сколько важных результатов еще будет получено на пути к ее доказательству. Однако есть вероятность, что такое доказательство само по себе невозможно в рамках существующей системы аксиом математики – об этом свидетельствует теорема Геделя. Более того, нахождение универсального закона для всех простых чисел (что напрямую никак не связано с гипотезой Римана) тоже может оказаться невозможным при существующих математических методах. В конечном итоге простые числа могут оказаться просто фундаментальными математическими константами, не поддающимися выражению через другие объекты, сродни фундаментальным физическим постоянным. Так теория чисел отсылает нас к философии, и в первую очередь к философии познания.

Список литературы

1. Marcus du Sautoy. "The music of the primes". – Cambridge University Press, 2003.

2. Bernhard Riemann. "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse" (On the number of prime numbers less than a given quantity). – Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859. (Translated by David R. Wilkins).