

*Theoretical study of receptivity of a thin weakly
non-parallel shock layer to acoustic disturbances
(in Russian)*

Yumashev, Dmitry

2005

MIMS EPrint: **2012.28**

Manchester Institute for Mathematical Sciences
School of Mathematics

The University of Manchester

Reports available from: <http://eprints.maths.manchester.ac.uk/>

And by contacting: The MIMS Secretary
School of Mathematics
The University of Manchester
Manchester, M13 9PL, UK

ISSN 1749-9097

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)**

**Теоретическое исследование восприимчивости
слабонепараллельного ударного слоя
к акустическим возмущениям**

**Диссертация на соискание степени магистра естественных наук
студента 961 уч. группы Юмашева Д.В.**

**Научный руководитель: кандидат физико-
математических наук Федоров А.В.**

**Рецензент: кандидат физико-математических
наук Остриков Н.Н.**

Москва, 2005

1

Московский Физико-Технический Институт

Оглавление

1. Список обозначений	стр. 3
2. Введение	стр. 4
3. Развитие невязких возмущений в слабонепараллельном ударном слое	стр. 5
4. Общий механизм возбуждения собственных колебаний	стр. 9
5. Предел тонкого слабонепараллельного ударного слоя	стр. 11
6. Спектр собственных колебаний	стр. 12
7. Восприимчивость к внешней акустике	стр. 15
8. Заключение	стр. 18
9. Литература	стр. 19
10. Приложения	стр. 20

Теоретическое исследование восприимчивости слаботеплопроводящего ударного слоя к акустическим возмущениям

Производится теоретический анализ восприимчивости слаботеплопроводящего ударного слоя к падающим из набегающего потока акустическим возмущениям. Излагается общая теория возбуждения собственных мод ударного слоя преломленной на головном скачке акустической волной. В пределе тонкого ударного слоя ($\gamma \rightarrow 1$, $(\gamma - 1)M_\infty^2 \rightarrow \infty$) с однородным основным течением строится аналитическое решение для спектра собственных мод. Это позволяет найти эффективные углы падения внешней акустики, вступающей в резонанс с собственными колебаниями. В явном виде определяются также положения резонансных областей.

Список обозначений

Основные физические переменные

A	= вектор возмущений
<i>a</i>	= скорость звука в неподвижной среде
<i>c</i>	= фазовая скорость в направлении <i>x</i>
k	= волновой вектор
M	= число Маха
<i>p</i>	= давление
R	= число Рейнольдса
<i>r</i>	= коэффициент отражения внутренней акустики от скачка
<i>T</i>	= температура
<i>t</i>	= время
<i>u</i>	= <i>x</i> компонента скорости
<i>v</i>	= <i>y</i> компонента скорости
<i>x, y</i>	= декартовы координаты
α	= <i>x</i> компонента волнового вектора
β	= <i>x</i> компонента волнового вектора сопряженной задачи
γ	= показатель адиабаты
δ	= толщина ударного слоя
ε	= угол наклона ударной волны
ρ	= плотность
σ	= <i>y</i> компонента волнового вектора
τ	= коэффициент прохождения внешней акустики через скачок
χ	= параметр гиперзвукового взаимодействия
ω	= частота

Нижние индексы

∞	=	в набегающем потоке
0	=	основное течение в ударном слое
e	=	характерные параметры масштабирования физических величин
s	=	преломленная акустика
$*$	=	точка резонанса

Верхние индексы

\wedge	=	матрица
$*$	=	сопряженный оператор

I. Введение

Исследование восприимчивости пограничных слоев к возмущениям не перестает быть актуальным. Связано это не только с теоретическим интересом к волновой динамике, но и с чисто практическими приложениями, которые направлены на подавление неустойчивых мод пограничного слоя, генерируемых внешними воздействиями. В недавнем численном эксперименте [1] было смоделировано возбуждение собственных колебаний сверхзвукового ударного слоя на пластине акустикой, падающей под разными углами из набегающего потока. Результаты [1] позволяют выявить структуру развития собственных мод вниз по потоку. Накладка собственных колебаний происходит вследствие их резонанса с внешней акустикой, проникающей в ударный слой после преломления на ударной волне. При этом резонансы оказываются локализованными в достаточно узких областях на определенных расстояниях друг от друга. Подобные закономерности нуждаются в теоретическом истолковании.

Общая теория восприимчивости собственных мод сверхзвукового пограничного слоя к возмущениям разработана в [2] и подробно изложена в [3]. Она описывает генерацию вязких возмущений, называемых волнами Толлмина-Шлихтинга, вибрациями обтекаемой поверхности, а также внешним акустическим полем. Целью данной работы является распространение этой теории на невязкие акустические возмущения в слабонепараллельном ударном слое, которые наряду с волнами Толлмина-Шлихтинга приводят к неустойчивости [4]. Предполагается, что воздействием является внешняя акустическая волна, преломленная на скачке уплотнения. Теория строится без ограничений для случая существенного вязко-невязкого взаимодействия, при котором профили основного потока сильно неоднородны по толщине ударного слоя. Однако получающиеся при этом краевые задачи для собственных колебаний могут быть проанализированы только с использованием дополнительных асимптотических оценок (например в коротковолновой части спектра, см. [5]). Поэтому во второй части работы рассматривается приближение слабого взаимодействия, в котором пограничный слой уходит на дно ударного слоя, а течение в последнем практически всюду однородно по его толщине. В результате удастся получить простое аналитическое решение для спектра собственных мод, которое в свою очередь дает ключ к исследованию восприимчивости.

Итоговым результатом работы является определение углов падения внешней акустики, способных вызвать резонанс в ударном слое. В явном виде находится также положение точек резонанса. Данные результаты качественно совпадают с картиной, полученной в [1] посредством прямого численного моделирования.

II. Развитие невязких возмущений в слабонепараллельном ударном слое

Рассмотрим двумерное обтекание произвольного затупленного тела гиперзвуковым потоком в случае умеренного вязко-невязкого взаимодействия¹ (Рис. 1). На поверхности тела при этом образуется пограничный слой, над которым нависает скачок уплотнения. Качественные профили скорости и температуры основного течения в ударном слое представлены на Рис. 1. При определенных условиях, о которых будет подробнее сказано в разделе IV, ударный слой является слабонепараллельным. Особенностью любого слабонепараллельного течения, будь то классический пограничный слой или тонкий ударный слой, является существенное различие между продольным и поперечным масштабами изменения функций поля течения. Поэтому для сохранения в уравнениях Навье-Стокса, описывающих такое течение, наиболее важных слагаемых нужно определенным образом произвести масштабирование физических величин.

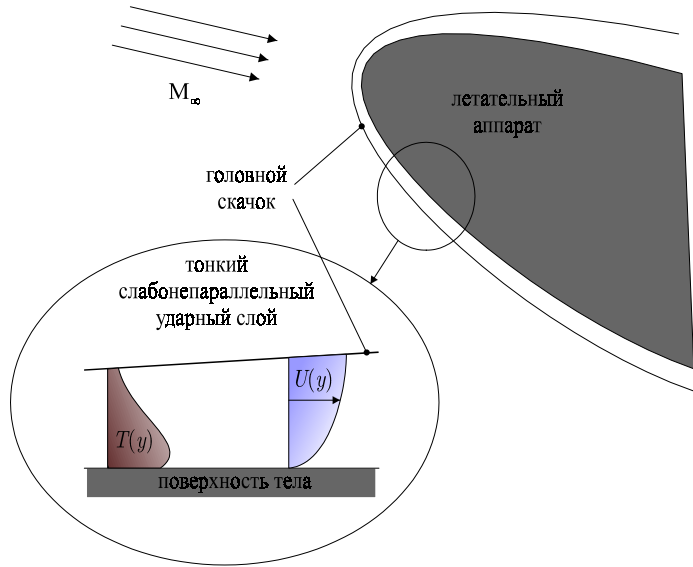


Рис. 1: Структура течения в ударном слое.

Определим ортогональную систему координат: ось x направим вдоль поверхности тела вниз по потоку, ось y – по нормали к поверхности. Если толщина ударного слоя описывается функцией $y = \delta(x)$, то условие слабой непараллельности имеет вид

$$d\delta / dx = \varepsilon(x) \ll 1.$$

Форма скачка часто бывает близка к прямолинейной (на рассматриваемых продольных масштабах), поэтому параметр ε в дальнейшем будет предполагаться не зависящим от x . Вполне понятно, что масштабом изменения всех функций основного поля течения в направлении y (за исключением давления) является некоторая характерная толщина ударного слоя δ_e , в то время как в продольном направлении параметры потока меняются на расстояниях порядка δ_e / ε . В подобной ситуации принято говорить, что параметры потока являются быстрыми функциями переменной y и медленными функциями переменной x . Аналогичные оценки относятся к масштабам x и y компонент скорости основного течения. В результате правила обезразмеривания параметров основного течения (индекс "0") и их возмущений (без индекса) выглядят следующим образом:

Величина	x	y	u_0	v_0	p_0, p	ρ_0, ρ	u, v	t
Масштаб	δ_e / ε	δ_e	U_e	εU_e	$\rho_e U_e^2$	ρ_e	U_e	δ_e / U_e

¹ В этом разделе параметр гиперзвукового взаимодействия $\chi = M_\infty^3 / \sqrt{R_\infty} \sim 1$.

Здесь U_e и ρ_e – значения продольной компоненты скорости и плотности в некотором начальном сечении $x_0 = 0$ (в котором $\delta = \delta_e$) на внешней границе ударного слоя. В дальнейшем условимся работать в безразмерных переменных, сохранив для них старые обозначения. Эволюция невязких двумерных возмущений, характеризующихся вектором $\mathbf{A} = \|u, p, v, \rho\|^T$, описывается системой

$$\hat{E} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \hat{H}_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \hat{H}_1 \mathbf{A} + \varepsilon \hat{H}_2 \mathbf{A} + O(\varepsilon^2), \quad (1)$$

в которой \hat{E} – единичная матрица 4×4 , матрица \hat{H}_x является оператором умножения, а операторы \hat{H}_1 и \hat{H}_2 содержат дифференцирование по y . Конкретный вид этих операторов приведен в приложениях (см. Приложение 1).

Система (1) записана таким образом, что все элементы входящих в нее операторов являются величинами порядка единицы. Имея в виду постановку задачи о восприимчивости мод ударного слоя к внешним акустическим возмущениям, представим решение для вектора возмущений в виде суперпозиции мод собственных колебаний (n) и преломленной (через скачок) внешней акустической волны (s):

$$\mathbf{A}(t, x, y) = \sum_n C_n(x) \Phi_n(y) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^x \alpha_n(\xi) d\xi - i\omega t\right) + \Phi_s(y) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \alpha_s x - i\omega t\right). \quad (2)$$

Обсудим его структуру. *Собственные функции* $\Phi_n(y)$ определяются из решения некоторой краевой задачи по переменной y ; эта же задача дает *собственные значения* $\alpha_n(x)$. Введение изменяющейся *амплитудной функции* $C_n(x)$ в собственное решение и зависимости волнового числа α_n от переменной x отражает эффекты непараллельности; в физических переменных функции $C_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ являются медленными. Множитель $1/\varepsilon$ появляется в эйконалах после масштабирования, поскольку в размерных переменных волновые числа удовлетворяют оценке $\alpha \sim 1/\delta_e$. Наконец, частота ω и волновое число α_s определяются параметрами внешней акустики; в силу предполагаемого локального постоянства угла наклона скачка (ε) α_s также берется не зависящим от x . Если изменение угла наклона ($d\varepsilon/dx$) все-таки существенно, то α_s будет зависеть от x , и эйконал последнего слагаемого в (2) нужно представить в форме $\int_0^x \alpha_s(\xi) d\xi$. Это, однако, не меняет сути дела.

Теперь обсудим вопрос о граничных и начальных условиях для системы (1). На стенке должно выполняться условие непротекания $v|_{y=0} = 0$. Условие на скачке (при $y = \delta(x)$) удобнее всего записать через коэффициент отражения r для возмущения давления:

$$p_{\text{отр}} = r p_{\text{пад}}, \quad (3)$$

индексы "пад" и "отр" характеризуют падающую из ударного слоя на скачок и отраженную от него волны. Коэффициент r зависит от интенсивности скачка и от параметров возмущений в ударном слое, и в общем случае является комплексной величиной. Такого рода граничное условие справедливо только для собственных мод. Для преломленной акустики (вынужденного решения), которая описывается отдельным слагаемым в (2), на скачке реализуется более сложное условие вида

$$p_{\text{отр}} = r p_{\text{пад}} + \tau p_{\text{внеш}}; \quad (4)$$

здесь τ – коэффициент прохождения внешнего звука через скачок, а $p_{\text{внеш}}$ – возмущение давления во внешнем звуке ($p_{\text{пад}}$, как и раньше, характеризует волну, падающую на скачок из ударного слоя). Конкретное представление для коэффициентов r и τ будет дано в разделах V, VI. Начальные условия по переменной x ставятся следующим образом:

$$C_n(0) = 0$$

для всех собственных мод ударного слоя. Это позволяет выделить эффект резонансного возбуждения собственных мод преломленной акустикой.

Займемся анализом решения общей системы (1). Подстановка (2) в (1) приводит к разделению порядков величины слагаемых по степеням ε . В главном приближении (ε^0) получается уравнение

$$\sum_n \left[-i\omega \hat{E} + i\alpha_n \hat{H}_x - \hat{H}_1 \right] C_n \Phi_n e^{F_n} = 0, \quad (5)$$

в котором для удобства вынужденное решение объединено с собственными модами (оно соответствует слагаемому с $n = s$), а эйконал $F_n = \frac{i}{\varepsilon} \int_0^x \alpha_n(\xi) d\xi - i\omega t$. В следующем приближении (ε^1) получается уравнение

$$\sum_n \left\{ \hat{H}_x \left[\frac{dC_n}{dx} \Phi_n + C_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right] - \hat{H}_2 C_n \Phi_n \right\} e^{F_n} = 0. \quad (6)$$

Определим проблему по нахождению функции Φ_n ($\forall n$)² как

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-i\omega \hat{E} + i\alpha_n \hat{H}_x - \hat{H}_1 \right] \Phi_n = 0 \\ + \text{граничные условия, соответствующие} \\ \text{физической постановке задачи.} \end{array} \right. \quad (7)$$

При этом уравнение (5) выполняется тождественно.

Проблема (7) есть задача на собственные значения $\alpha_n(x)$. Матрица $\hat{H} = -i\omega \hat{E} + i\alpha_n \hat{H}_x - \hat{H}_1$ приведена в приложениях (см. Приложение 2). Она не содержит поперечной компоненты скорости основного течения v_0 и производных от функций основного течения по переменной x . В результате уравнение для собственной функции Φ_n в точности повторяет то, что было получено ранее для локально-параллельного ударного слоя (см., например, [5]). По этой причине задача (7) может быть названа *локально-однородной*. Зависимость от переменной x входит в нее параметрически через граничные условия на скачке и коэффициенты матрицы \hat{H} .

Обратимся теперь к анализу следующего приближения (6). Определим скалярное произведение двух векторных функций следующим образом:

$$(\Phi, \Psi) = \int_0^{\delta(x)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j \Psi_j dy.$$

² Система (7) также определяет задачу по нахождению функции Φ_s в вынужденном решении.

Для произвольного матричного оператора \hat{H} введем сопряженный оператор \hat{H}^* в соответствии с определением

$$(\hat{H}\Phi, \Psi) = (\Phi, \hat{H}^*\Psi).$$

Нетрудно получить, что если элементы исходного оператора \hat{H} имеют структуру $g_{jk} + h_{jk} \frac{\partial}{\partial y}$, то элементами сопряженного оператора \hat{H}^* будут

$$h_{jk}^* = g_{kj} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial y} - h_{kj} \frac{\partial}{\partial y}.$$

При этом также должно выполняться граничное условие

$$\sum_j \left(\sum_k h_{jk} \Phi_k \right) \Psi_j \Big|_{y=0}^{y=\delta(x)} = 0. \quad (8)$$

В частности, если $h_{jk} = 0$, т.е. оператор \hat{H} является просто оператором умножения, то сопряженный ему оператор \hat{H}^* получается из \hat{H} простым транспонированием без наложения дополнительного условия (8).

Умножим задачу (7) скалярно на некоторую функцию Ψ_k . После переброски операторов \hat{H}_x и \hat{H}_1 в правую часть скалярного произведения мы получим уравнение

$$(\Phi_n, [-i\omega \hat{E} + i\alpha_n \hat{H}_x^* - \hat{H}_1^*] \Psi_k) = 0. \quad (9)$$

По аналогии с (7) сформулируем краевую задачу для функции Ψ_k в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} [-i\omega \hat{E} + i\beta_k \hat{H}_x^* - \hat{H}_1^*] \Psi_k = 0 \\ + \text{граничные условия, обеспечивающие} \\ \text{существование сопряженных операторов.} \end{array} \right. \quad (10)$$

Это суть задача на собственные значения $\beta_k(x)$. Матрица $\hat{H}^* = -i\omega \hat{E} + i\beta_k \hat{H}_x^* - \hat{H}_1^*$ приведена в приложениях (см. Приложение 2). Проблема (10) может быть названа *сопряженной локально-однородной задачей*.

Используя (9) и (10), нетрудно получить важное соотношение

$$i(\alpha_n - \beta_k) (\hat{H}_x \Phi_n, \Psi_k) = 0.$$

Из него вытекает свойство ортогональности функций Φ_n и Ψ_k , являющихся решениями прямой и сопряженной локально-однородных задач:

$$(\hat{H}_x \Phi_n, \Psi_k) = 0, \quad \alpha_n \neq \beta_k.$$

Данное свойство позволяет построить общее решение уравнения (6). Умножая его скалярно на Ψ_k , получим систему уравнений следующего вида:

$$\left(\hat{H}_x \Phi_k, \Psi_k\right) \frac{dC_k}{dx} + \sum_n \left(\left[\hat{H}_x \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} - \hat{H}_2 \Phi_n \right], \Psi_k \right) C_n e^{F_n - F_k} = 0$$

Для весьма широкого класса задач (7), (10) справедливо свойство $\left(\hat{H}_x \Phi_k, \Psi_k\right) \neq 0$, которое дополняет условие ортогональности в случае совпадения спектральных параметров α_k и β_k (см. [3]). Подразумевая выполнение этого свойства в нашей задаче и определяя матричный элемент

$$W_{kn} = \frac{\left(\hat{H}_x \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}, \Psi_k\right) - \left(\hat{H}_2 \Phi_n, \Psi_k\right)}{\left(\hat{H}_x \Phi_k, \Psi_k\right)}, \quad (11)$$

перепишем последнюю систему уравнений в виде

$$\frac{dC_k}{dx} + \sum_n W_{kn} C_n e^{F_n - F_k} = 0. \quad (12)$$

Данная система описывает эволюцию амплитудных коэффициентов $C_n(x)$ вследствие непараллельности ударного слоя, а также из-за взаимодействия собственных мод с вынужденным решением. В следующем разделе с помощью системы (12) мы исследуем механизм возбуждения собственных мод ударного слоя преломленной внешней акустикой.

III. Общий механизм возбуждения собственных колебаний ударного слоя

Систему (12) можно переписать в более удобном виде, выделив из общей суммы слабое, соответствующее вынужденному решению:

$$\frac{dC_k}{dx} + \sum_n W_{kn} C_n e^{F_n - F_k} + W_{ks} e^{F_s - F_k} = 0.$$

Сперва проанализируем решение этой системы при нулевом внешнем воздействии, когда $\Phi_s = 0$ и, следовательно, $W_{ks} = 0$. Определяя вектор-столбец $\mathbf{C} = \|C_1, C_2, \dots, C_k, \dots\|^T$ и матрицу $\hat{W} = \|W_{kn} e^{F_n - F_k}\|$, получим общее решение однородной системы в форме³

$$\mathbf{C}(x) = \exp\left(-\int_0^x \hat{W}(\xi) d\xi\right) \mathbf{C}(0). \quad (13)$$

Если функции $W_{kn}(x)$ регулярны, а спектр собственных колебаний не имеет самопересечений, т.е. $|\alpha_n(x) - \alpha_k(x)| > 0$ для любой пары (n, k) и для всех x , то внедиагональные элементы (с $n \neq k$) интеграла в (13) можно интегрировать по частям неограниченное число раз:

$$I_{kn} = \int_0^x W_{kn} e^{F_n - F_k} d\xi = -i\varepsilon \left[\frac{W_{kn} e^{F_n - F_k}}{(\alpha_n - \alpha_k)} \right]_0^x - \int_0^x e^{F_n - F_k} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{W_{kn}}{(\alpha_n - \alpha_k)} \right) d\xi = \dots$$

³ Мы предполагаем, что решение представимо в таком виде.

Продолжая процедуру интегрирования по частям, мы получим решение в виде ряда по степеням ε , причем первое слагаемое ряда имеет порядок $O(\varepsilon)$. Это означает, что решение (13) представимо в форме

$$C(x) = \exp\left(-\int_0^x \|W_{nn}\| d\xi\right) (1 + O(\varepsilon)) C(0),$$

где слагаемое $O(\varepsilon)$ отвечает взаимодействию между разными модами ($n \neq k$). Оно мало по сравнению с воздействием n -ой моды саму на себя, которое описывается диагональной матрицей $\|W_{nn}\|$ и на расстояниях $x = O(1)$ (в масштабированных переменных) дает вклад порядка 1. Мы приходим к выводу, что перекрестным влиянием мод собственных колебаний в случае невырожденного спектра можно пренебречь с точностью до $O(\varepsilon)$. В дальнейших рассуждениях будем по умолчанию это подразумевать.

При наличии внешней акустики взаимодействие собственной моды с вынужденным решением описывается уравнением

$$\frac{dC_n}{dx} + W_{nn} C_n + W_{ns} e^{F_s - F_n} = 0 \quad (14)$$

Предположим, что существует такая резонансная точка $x_* > 0$, в которой $\alpha_n(x_*) = \alpha_s$, но при этом $\alpha'_n(x_*) \neq 0$. В данной точке уравнения для собственных функций Φ_n и Φ_s совпадают, а граничные условия на скачке различаются: вынужденное решение должно согласовываться с внешним воздействием (слагаемое $\tau p_{\text{внеш}}$ в (4)). Коэффициент отражения внутренней акустики r , входящий в граничное условие на скачке, при заданной интенсивности скачка есть функция от частоты и волнового числа возмущений: $r = r(\omega, \alpha)$ (см. раздел V). Но в точке резонанса волновые числа собственной моды (α_n) и вынужденного решения (α_s) по определению совпадают, поэтому происходит также совпадение коэффициентов r в (3) и (4). А это приводит к тому, что амплитуда давления в вынужденном решении Φ_s обязана неограниченно возрастать при $x \rightarrow x_*$. Итак, функция Φ_s имеет особенность в точке резонанса – иначе для нее не выполнялось бы граничное условие (4).

Перейдем от Φ_s к новой функции $\Phi = \frac{(x - x_*)}{b} \Phi_s$; постоянная b вводится по соображениям нормировки. Простым умножением задачи (7) (переформулированной для Φ_s) на $(x - x_*)/b$ нетрудно получить, что функция Φ регулярна в точке x_* . Это дает нам возможность выделить особенность в матричном элементе W_{ns} (его структуру см. в (11)). Определяя регулярные матричные элементы

$$V = \frac{(\hat{H}_x \Phi, \Psi_n)}{(\hat{H}_x \Phi_n, \Psi_n)}, \quad W = \frac{\left(\hat{H}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \Psi_n\right) - (\hat{H}_2 \Phi, \Psi_n)}{(\hat{H}_x \Phi_n, \Psi_n)},$$

преобразуем (14) к виду

$$\frac{dC_n}{dx} + W_{nn} C_n + \left[\frac{W}{(x - x_*)} - \frac{V}{(x - x_*)^2} \right] e^{F_s - F_n} = 0.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $C_n(0) = 0$ дается формулой

$$C_n(x) = b \int_0^x \left\{ \left[\frac{W(\xi)}{(\xi - x_*)} - \frac{V(\xi)}{(\xi - x_*)^2} \right] e^{F_s - F_n} \exp \left(- \int_{\xi}^x W_{nn}(\eta) d\eta \right) \right\} d\xi. \quad (15)$$

Нетрудно найти асимптотику этого решения при $x \rightarrow x_*$:

$$C_n(x) = - \frac{b}{x - x_*} e^{F_s - F_n} + \text{регулярная функция}.$$

При определенном значении b функция Φ , как нетрудно убедиться, совпадает с Φ_n в точке резонанса x_* , и общее решение (2) для вектора возмущений \mathbf{A} содержит уничтожающие друг друга сингулярные слагаемые. В результате решение для \mathbf{A} регулярно в точке резонанса, как и должно быть для любого физического решения.

Придерживаясь идеологии метода выделения особенностей, с помощью (15) можно построить равномерно-пригодное решение для функции \mathbf{A} , которое имеет следующую структуру (для одной собственной моды, вступающей в резонанс с преломленной акустикой):

$$\mathbf{A}(t, x, y) = b \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \alpha_s x_* + \frac{i}{\varepsilon} \int_{x_*}^x \alpha_n(\xi) d\xi - i\omega t \right) (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4); \quad (16)$$

функции \mathbf{A}_j ($j = 1 \div 4$) и коэффициент b приведены в приложениях (см. Приложение 3). Все функции регулярны в точке x_* . Качественное поведение решения (16) (для второй компоненты вектора возмущений) в случае жесткого резонанса⁴ показано на **Рис. 2**.

Наличие быстроосциллирующей экспоненты $e^{F_s - F_n}$ в решении (15) позволяет сделать

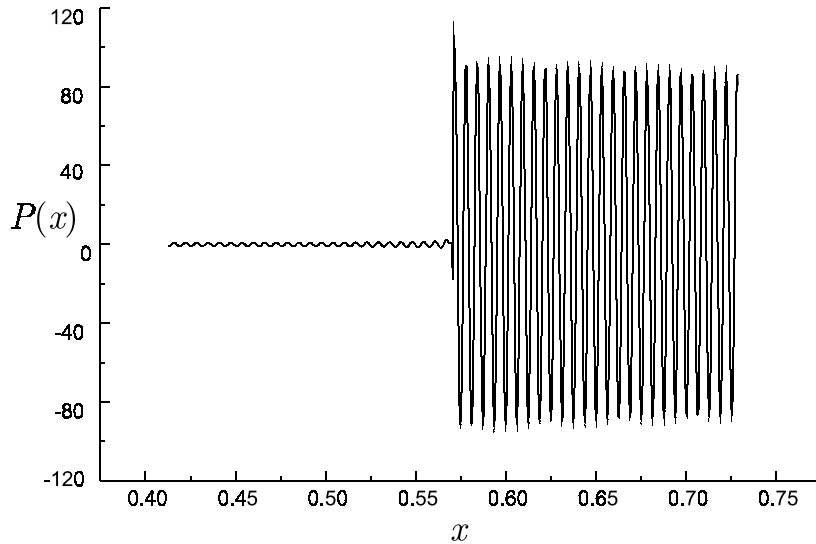


Рис. 2: Резонансная накачка собственной моды в случае, когда точка резонанса x_* лежит на вещественной оси.

⁴ когда точка резонанса x_* лежит на вещественной оси.

несколько выводов относительно процесса накачки собственной моды. При $\alpha'_n(x_*) \neq 0$ резонансная область, в которой существенно взаимодействие между модами, имеет размер порядка $\sqrt{\varepsilon}$. На выходе из этой области, когда $x - x_* \gg \sqrt{\varepsilon}$, амплитуда собственной моды имеет определенную асимптотику (см., например, [2]): она усиливается в $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ раз по сравнению со значением на левой границе резонансной области (см. **Рис. 2**).

IV. Предел тонкого слабонепараллельного ударного слоя

Рассмотрим двумерное обтекание клина гиперзвуковым потоком совершенного газа (**Рис. 3**) и определим декартову систему координат: ось x направим вдоль поверхности клина вниз по потоку, ось y – перпендикулярно поверхности клина. Посредством φ обозначим угол между поверхностью клина и вектором скорости набегающего потока \mathbf{U}_∞ ; $\varphi = O(1)$. Если параметр вязко-невязкого взаимодействия

$$\chi = M_\infty^3 / \sqrt{R_\infty(x)}$$

удовлетворяет оценке $\chi \ll 1$ (здесь

$R_\infty(x) = \rho_\infty U_\infty x / \mu_\infty$), то локальная толщина об-

разующегося на поверхности клина пограничного слоя мала по сравнению с расстоянием до

ударной волны (толщиной ударного слоя). В таком случае параметры основного течения в

ударном слое (u_0, ρ_0) практически всюду однородны по его ширине (**Рис. 4**), что существенно упрощает анализ динамики акустических возмущений⁵.

Особенно удобным для теоретического исследования является предел тонкого слабонепараллельного ударного слоя. Он получается при $\gamma \rightarrow 1$ и $(\gamma - 1)M_\infty^2 \rightarrow \infty$. В соответствии с этим определим малые параметры ε и η :

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2} \operatorname{tg} \varphi \ll 1, \quad \eta = \frac{1}{\varepsilon M_\infty^2 \sin^2 \varphi} \ll 1, \quad \operatorname{tg} \varphi = O(1) \quad (17)$$

В рассматриваемом пределе угол наклона ударной волны по отношению к поверхности тела равен ε , а толщина ударного слоя нарастает по линейному закону $\delta(x) = \delta_0 + \varepsilon(x - x_0)$, где

x_0 – некоторое начальное сечение. Введение начального сечения исключает из рассмотрения

окрестность передней кромки клина, в которой реализуется сильное взаимодействие ударной

волны и пограничного слоя. Для удобства перенесем начало координат в это сечение, поло-

жив $x_0 = 0$. В безразмерных переменных толщина ударного слоя $\delta(x) = 1 + x$. Преобразова-

ния газодинамических функций на ударной волне, которые вытекают из соотношений Гюгонио, представляются следующим образом:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi} + \dots, \quad \frac{T_\infty}{T_0} = \eta \operatorname{tg} \varphi + \dots, \quad \frac{p_\infty}{p_0} = \varepsilon \eta + \dots, \quad M_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi}} (1 + \dots); \quad (18)$$

индексом "0", как и прежде, обозначены параметры основного потока в ударном слое.

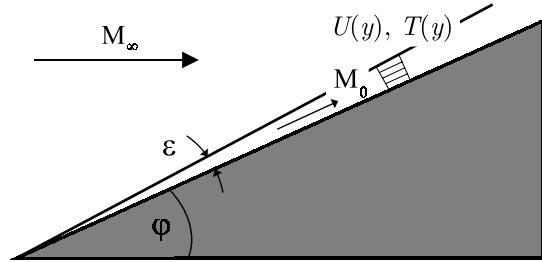


Рис. 3: Схема гиперзвукового обтекания клина.

⁵ В операторе \hat{H} локально-однородной задачи обнуляются слагаемые, содержащие производные по y от функций основного течения; все оставшиеся коэффициенты не зависят от y (см. Приложение 2).

В последующих разделах с использованием сделанных в этом параграфе приближений будут получены простые аналитические решения для спектра собственных колебаний ударного слоя. Это, в свою очередь, позволит аналитически решить задачу о восприимчивости ударного слоя к внешней акустике.

V. Спектр собственных колебаний тонкого ударного слоя

Основная система (7) в случае однородного основного течения (это имеет место при $\chi \ll 1$) приводится к простому уравнению 2-го порядка для каждой из четырех компонент собственной функции Φ_n в отдельности⁶:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \left(\frac{(\omega - \alpha u_0)^2}{a_0^2} - \alpha^2 \right) \Phi_j = 0, \quad j = 1 \div 4. \quad (19)$$

Здесь и далее индекс "n", соответствующий номеру собственной моды, для удобства опускается. Вводя поперечное волновое число σ в соответствии с определением

$$\sigma^2 = \frac{(\omega - \alpha u_0)^2}{a_0^2} - \alpha^2 \quad (20)$$

получим общее решение уравнения (19) (запишем его для второй компоненты вектора Φ_n , т.е. для возмущения давления):

$$\Phi_2 = C e^{i\sigma y} + D e^{-i\sigma y}. \quad (21)$$

Дисперсионное соотношение (20) описывает акустику, распространяющуюся на фоне однородного потока. Слагаемые в (21) характеризуют падающую ($e^{i\sigma y}$) и отраженную ($e^{-i\sigma y}$) от скачка волны.

Граничные условия для решения (21) следующие. На стенке ($y = 0$) в силу условия непротекания ($\Phi_3 = 0$) и связи

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + (-i\omega + i\alpha u_0) \Phi_3 = 0,$$

которая вытекает непосредственно из (7), должно быть $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0$; следовательно в (21)

$C = D$. На скачке ($y = \delta(x)$) для собственного решения справедливо условие (3), которое

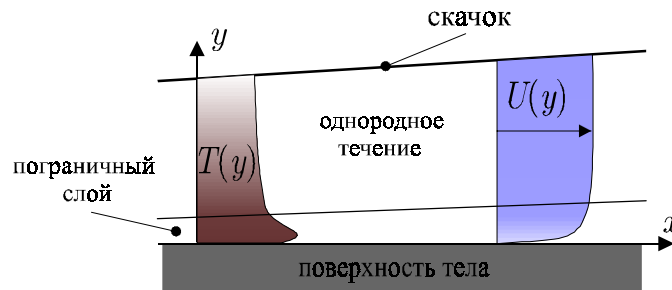


Рис. 4: Схема течения в ударном слое при $\chi \ll 1$.

⁶ Возмущения, у которых $\omega = \alpha u_0$ (энтропийно-вихревая мода), исключаются из рассмотрения.

дает спектр собственных значений $\{\sigma_n\}$, а вместе с ним (на основании (20)) и $\{\alpha_n\}$; для вынужденного решения должно выполняться условие (4), которое позволяет найти амплитудный коэффициент C .

Остановимся на исследовании спектра собственных мод. Введем угол θ , характеризующий направление волнового вектора \mathbf{k} у собственной волны:

$$\begin{cases} \alpha = k \cos \theta \\ \sigma = k \sin \theta \end{cases}$$

Тогда быстрая акустика соответствует значениям $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ($\alpha > 0$), а медленная – значениям $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ($\alpha < 0$). При таком описании у быстрых волн частота ω всегда положительна, в то время как у сносимых вниз по потоку медленных волн (у которых фазовая скорость $c = \omega/\alpha > 0$) ω является отрицательной. Частота возмущений в системе, связанной с потоком, есть положительная величина:

$$\omega' = \omega - \alpha u_0 = k a_0 > 0.$$

В граничное условие (3) входит коэффициент отражения r , который в рассматриваемом пределе слабонепараллельного слоя имеет вид

$$r = \frac{-\sin \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} (2 + \cos^2 \theta) + \dots}{\sin \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} (2 - \cos^2 \theta) + \dots}. \quad (22)$$

Данное выражение получено из общей формулы, приведенной, например, в [6]. Зависимость от второго малого параметра η уходит в следующие приближения, что объясняется гиперзвуковой стабилизацией ударного слоя, которая реализуется в условиях (17).

Физически очевидно, что поперек ударного слоя образуются стоячие волны (как и в случае параллельного слоя с $\varepsilon = 0$), поэтому для $\sin \theta$ должно получаться решение порядка 1. Это дает нам возможность разложить (22) по малому параметру $\sqrt{\varepsilon}$:

$$r = -1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \frac{4}{\sin \theta} + \dots \quad (23)$$

Исходя из вида решения (21) и равенства в нем амплитуд C и D (которое навязано условием на стенке), граничное условие (3) сводится к

$$r = \exp(-2i\sigma\delta). \quad (24)$$

Уравнения (20), (23) и (24) при фиксированной частоте ω образуют замкнутую систему, из которой можно получить дисперсионные зависимости $\alpha(\omega, x)$ и $\sigma(\omega, x)$. Строя разложения

$$\alpha = \alpha^{(0)} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \alpha^{(1)} + \dots, \quad \sigma = \sigma^{(0)} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \sigma^{(1)} + \dots$$

и подставляя их эту систему, в двух главных приближениях получим такое решение:

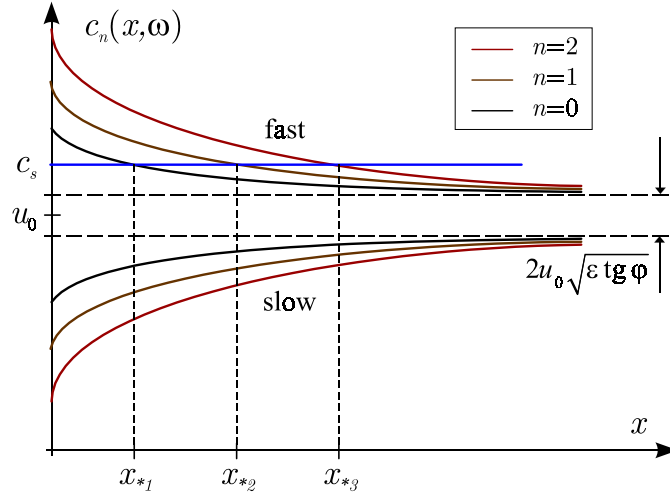


Рис. 5: Спектр собственных колебаний слабонепараллельного ударного слоя.

$$\begin{cases} \alpha_n(\omega, x) = \frac{|\omega|}{u_0} \left[\pm 1 - \sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi} \sqrt{1 + v_n^2 z^2} \right] \\ \sigma_n(\omega, x) = \frac{v_n}{\delta(x)} - 2i \frac{|\omega|}{u_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \frac{\sqrt{1 + v_n^2 z^2}}{v_n} \end{cases} \quad (25)$$

Здесь $v_n = \pi/2 + \pi n$ ($n \in \mathbb{N}$); $z(x) = \frac{u_0}{|\omega| \delta(x)} = O(1)$; верхний знак соответствует быстрой, а нижний – медленной акустике. Для фазовой скорости в направлении x на основании (25) имеем

$$c_n(\omega, x) = \omega / \alpha_n = u_0 \left[1 \pm \sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi} \sqrt{1 + v_n^2 z^2} + \dots \right].$$

Данная дисперсионная зависимость (как функция x при фиксированной ω) схематически показана на **Рис. 5**. Наконец, в главном приближении по $\sqrt{\varepsilon}$ наклон волнового вектора \mathbf{k} определяется из уравнения

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + v_n^2 z^2}}. \quad (26)$$

Это решение понадобится нам при исследовании всевозможных направлений внешней акустики, при которых возникает резонанс с собственными модами (см. раздел VI).

VI. Восприимчивость слабонепараллельного ударного слоя к внешней акустике

Предположим, что из внешнего пространства на ударный слой падает акустическая волна с частотой ω_∞ (эта частота задана в системе, связанной с набегающим потоком)⁷ и волновым вектором \mathbf{k}_∞ , который образует с \mathbf{U}_∞ угол θ_∞ (**Рис. 6**). Модуль волнового вектора связан с

⁷ Такая постановка задачи более физична, нежели задание частоты в системе, связанной с телом.

ω_∞ соотношением $k_\infty = \omega_\infty / a_\infty$. В неподвижной системе, связанной с телом, частота волны есть

$$\omega = \omega_\infty (1 + M_\infty \cos \theta_\infty). \quad (27)$$

При фиксированной ω_∞ она различна для разных направлений θ_∞ . Наконец, амплитуда возмущения давления в падающей волне равна B_∞ .

Внешняя акустика преломляется через ударную волну и взаимодействует с собственными колебаниями ударного слоя. Оказывается, что эффективная накачка собственных мод происходит при вполне определенных значениях угла падения θ_∞ . При этом в ударном слое образуются локализованные в направлении оси x резонансные области размером $\sim \sqrt{\varepsilon}$ (см. раздел III), положение которых существенно зависит от параметров падающего звука.

Компоненты волнового вектора \mathbf{k}_s преломленной акустики нетрудно получить из условий непрерывности частоты и тангенциальной компоненты волнового вектора на скачке. Вводя угол θ_s между \mathbf{k}_s и поверхностью тела (осью x), запишем эти условия в виде

$$\begin{cases} (\cos \theta_s + \varepsilon \sin \theta_s) k_s = (\cos(\theta_\infty - \varphi) + \varepsilon \sin(\theta_\infty - \varphi)) k_\infty \\ (a_0 + u_0 \cos \theta_s) k_s = \omega \end{cases} \quad (28)$$

Система (28) с учетом преобразования (18) параметров основного течения на скачке приводится к следующему уравнению для θ_s :

$$\cos \theta_s \left[\operatorname{tg} \varphi \sin(\theta_\infty - \varphi) + \varepsilon \sin(\theta_\infty - \varphi) - \sqrt{\varepsilon \eta} \operatorname{tg} \varphi \right] - \varepsilon \sin \theta_s \frac{\cos \theta_\infty}{\cos \varphi} = -\sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi} \cos(\theta_\infty - \varphi) \quad (29)$$

Нас интересует решение $\cos \theta_s = O(1)$, которое может вступать в резонанс с собственными модами. Из структуры уравнения (29) вытекает, что такое решение существует при углах падения θ_∞ , удовлетворяющих условию⁸

$$\theta_\infty - \varphi = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \vartheta, \quad (30)$$

либо

$$\theta_\infty - \varphi = \pi + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \vartheta. \quad (31)$$

В этих уравнениях параметр $\vartheta \geq 1$ ($\vartheta \ll 1/\sqrt{\varepsilon}$) определяет направление волнового вектора падающей извне акустики (\mathbf{k}_∞), способной вступать в резонанс с собственными мо

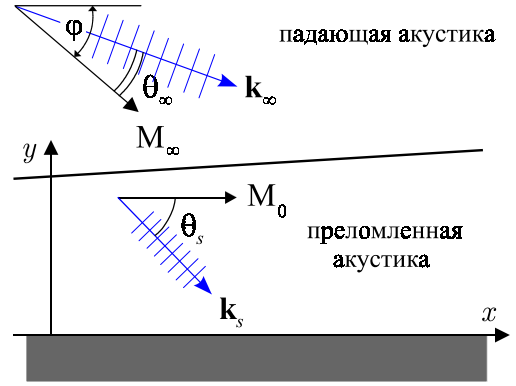


Рис. 6: Основные параметры падающей и преломленной акустики.

⁸ $(\theta_\infty - \varphi)$ есть угол между вектором \mathbf{k}_∞ и поверхностью тела.

дами ударного слоя на расстояниях $x = O(1)$. В силу малости параметра ε данные направления практически параллельны поверхности тела (см. **Рис. 7**). Уравнение (30) соответствует быстрой внешней акустике, и оно приводит к решению

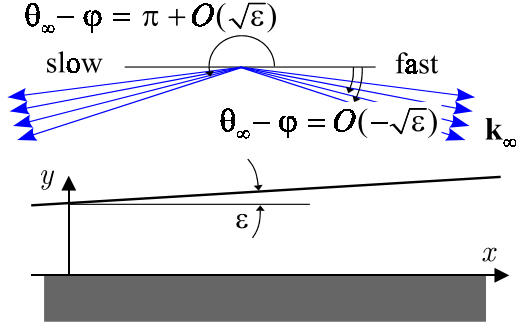


Рис. 7: Эффективные направления внешней акустики.

нового вектора преломленной волны в главном приближении связан с k_∞ соотношением

$$k_s = \mathfrak{G} k_\infty ;$$

x и y компоненты волнового вектора \mathbf{k}_s равны

$$\begin{cases} \alpha_s = k_s \cos \theta_s = \pm k_\infty \\ \sigma_s = k_s \sin \theta_s = k_\infty \sqrt{\mathfrak{G}^2 - 1} \end{cases} \quad (32)$$

Здесь, как и раньше, верхний и нижний знаки соответствуют быстрой и медленной акустике. Чтобы сформулировать условие возникновения резонанса, осталось получить выражение для частоты ω падающей волны как функции параметра \mathfrak{G} . В силу (27) и пары условий (30), (31) имеем:

$$\omega = \omega_0 \left[\pm 1 + \mathfrak{G} \sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi} \right],$$

где $\omega_0 = \omega_\infty M_\infty \cos \varphi$. Подставляя это выражение в (25) и группируя слагаемые одинакового порядка малости, получим окончательное решение для спектра собственных колебаний:

$$\begin{cases} \alpha_n(\omega, x) = \frac{\omega_0}{u_0} \left[\pm 1 + \sqrt{\varepsilon \operatorname{tg} \varphi} \left(\mathfrak{G} - \sqrt{1 + v_n^2 z^2} \right) + \dots \right] \\ \sigma_n(\omega, x) = \frac{v_n}{\delta(x)} - 2i \frac{\omega_0}{u_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} \frac{\sqrt{1 + v_n^2 z^2}}{v_n} + \dots \end{cases} \quad (33)$$

(параметр $z(x) = u_0 / \omega_0 \delta(x)$).

Резонанс реализуется в том случае, когда в главном приближении происходит совпадение спектральных параметров (α_n, σ_n) с (α_s, σ_s) . Такое условие, очевидно, эквивалентно равенству углов θ и θ_s наклона волновых векторов собственного и вынужденного решений. Поскольку в главном приближении $\cos \theta_s = \pm 1 / \mathfrak{G}$, а $\cos \theta$ дается формулой (26), мы приходим к следующему критерию возникновения резонанса:

$$\vartheta = \sqrt{1 + v_n^2 z^2}. \quad (34)$$

Данное уравнение определяет положение точки резонанса n -ой собственной моды (x_{*n}) с вынужденным решением при заданных параметрах внешней акустики (ω_0, ϑ). Чем выше номер моды (при фиксированных ω_0, ϑ), тем дальше вниз по потоку расположена точка x_{*n} . Любые две соседние резонансные области (x_{*n} и $x_{*(n+1)}$) расположены на одном и том же расстоянии друг от друга (см. **Рис. 5**). Мы видим также, что в точке резонанса из решения (33) для α_n выпадает слагаемое $\sim \sqrt{\varepsilon}$, т.е. α_n и α_s совпадают с точностью до $O(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon\eta})$.

О возможности проникновения в ударный слой внешней акустики с отличными от (30) и (31) направлениями можно сказать следующее. Для углов падения из промежутков

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_\infty - \varphi < -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}}, \quad \pi + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} < \theta_\infty - \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

(см. **Рис. 7**) внешняя акустика проникает в ударный слой, однако при существенном удалении ($\theta_\infty - \varphi$) от значений $-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}}$ и $\pi + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}}$ (когда в (30) и (31) $\vartheta \gg 1$) для $\cos \theta_s$ получается решение, близкое к нулю. Преломленная акустика подобного рода (волновой вектор у нее почти перпендикулярен поверхности тела) теоретически может вступать в резонанс только с очень высокими номерами собственных мод ($n \gg 1$). Если же угол падения θ_∞ изменяется в пределах

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}} < \theta_\infty - \varphi < \pi + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}}$$

(см. **Рис. 7**), то такая волна не проникает в ударный слой, полностью отражаясь от скачка. Это следует из неразрешимости уравнения (29) в указанном диапазоне углов падения.

Получим, наконец, выражение для амплитуды вынужденного решения в виде функции параметров (ω_0, ϑ). Преломленная акустика, как и собственные моды, описывается уравнением (19). Его решение по структуре совпадает с (21) с той лишь разницей, что поперечное волновое число σ_s в нем определяется параметрами внешней акустики (см. (32)). Учитывая граничное условие на стенке, представим решение для возмущения давления в преломленной волне в форме

$$\Phi_2 = C(x)(e^{i\sigma_s y} + e^{-i\sigma_s y}).$$

Подставляя компоненты данного решения в граничное условие (4) на скачке, получим уравнение для амплитудной функции $C(x)$. В результате

$$\Phi_2(y) = \frac{2\tau B_\infty e^{i\sigma_s \delta}}{1 - r(\theta_s) e^{2i\sigma_s \delta}} \cos(\sigma_s y) \quad (35)$$

коэффициент $r(\theta_s)$ определен формулой (22). Для коэффициента прохождения τ в пределе (17) получается выражение вида

$$\tau = M_\infty^2 (1 + O(\sqrt{\varepsilon})).$$

В гиперзвуковом пределе коэффициент τ велик, и внешняя акустика многократно усиливается по прохождении через скачок. Это способствует возбуждению мод ударного слоя.

При подходе к резонансу знаменатель в (35), вообще говоря, не обращается в ноль. Связано это с тем обстоятельством, что условие $r(\theta)e^{2i\sigma\delta} = 1$, совпадающее с уравнением (24) для собственных мод, имеет комплексное решение для σ (см. (33)), в то время как параметр σ_s чисто вещественный. Поэтому в точке резонанса знаменатель в главном приближении равен

$$4 \left(\frac{\sqrt{1 + v_n^2 z^2}}{v_n z} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi}}.$$

Отличие его от нуля обуславливает малую расстройку резонанса; положение точки резонанса (в которой знаменатель строго равен нулю) сдвигается в комплексную плоскость x на расстояние порядка $\sqrt{\varepsilon}$ от вещественной оси. Как следствие, существенно изменяется асимптотика решения (15) на выходе из резонансной области, характеризующая накачку собственных мод. Эффект расстройки резонанса проиллюстрирован на **Рис. 8**.

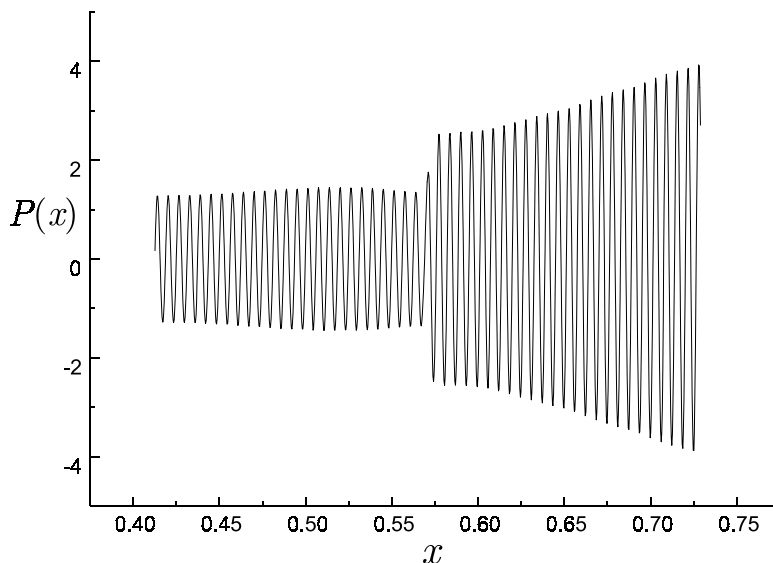


Рис. 8: Профиль давления на стенке в случае расстройки резонанса.

VII. Заключение

Произведен теоретический анализ восприимчивости слабонепараллельного ударного слоя к падающим из набегающего потока акустическим возмущениям. Изложена общая теория возбуждения собственных мод ударного слоя преломленной на головном скачке акустической волной. В пределе тонкого ударного слоя ($\gamma \rightarrow 1$, $(\gamma - 1)M_\infty^2 \rightarrow \infty$) с однородным основным течением построено аналитическое решение для спектра собственных мод. Это позволило найти эффективные направления падения внешней акустики, вступающей в резонанс с собственными колебаниями. В явном виде определены также положения резонансных областей. Результаты работы качественно совпадают с картиной, полученной в [1] посредством прямого численного моделирования.

Литература

- [1] Egorov I.V., Fedorov A.V., Soudakov V.G. Direct numerical simulation of supersonic boundary-layer receptivity to acoustic disturbances // AIAA Paper No. 2005-97.
- [2] Федоров А.В. Возбуждение и развитие волн неустойчивости в пограничном слое сжимаемого газа // М., МФТИ, 1982.
- [3] Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности // Новосибирск, Наука, 1987.
- [4] Malik M.R., Zang T.A. & Bushnell D.M. Boundary layer transition in hypersonic flows // AIAA Paper 90-5232, 1990.
- [5] Гуцин В.Р., Федоров А.В. Асимптотическая структура волновых возмущений в тонком ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 72-79.
- [6] McKenzie J.F., Wesrphal K.O. Interaction of linear waves with oblique shock waves // Physics of Fluids, Vol. 11, No. 11, 1968.

VIII. Приложение 1

Матричные элементы системы (1); $\mathbf{V}_0 = \|u_0, v_0\|^T$ – вектор скорости основного течения в ударном слое.

$$\hat{H}_x = \begin{vmatrix} u_0 & 1/\rho_0 & 0 & 0 \\ \rho_0 a_0^2 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ \rho_0 & 0 & 0 & u_0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{H}_1 = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u_0}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 a_0^2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{H}_2 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} & -\frac{a_0^2}{p_0} (\mathbf{V}_0, \nabla) \rho_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial x} & 0 & 0 & \text{div } \mathbf{V}_0 + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Члены $\frac{\partial p_0}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial x}$ в безразмерных переменных имеют порядок ε^2 , и по этой причине выпадают из матричных элементов.

IX. Приложение 2

Матрицы \hat{H} и \hat{H}^* в локально-однородных задачах (7) и (10).

$$\hat{H} = \begin{vmatrix} -i\omega + i\alpha u_0 & \frac{i\alpha}{\rho_0} & \frac{\partial u_0}{\partial y} & 0 \\ i\alpha \rho_0 a_0^2 & -i\omega + i\alpha u_0 & \rho_0 a_0^2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} & -i\omega + i\alpha u_0 & 0 \\ i\alpha \rho_0 & 0 & \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} & -i\omega + i\alpha u_0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{H}^* = \begin{vmatrix} -i\omega + i\beta u_0 & i\beta \rho_0 a_0^2 & 0 & i\beta \rho_0 \\ \frac{i\beta}{\rho_0} & -i\omega + i\beta u_0 & \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} & -\frac{\partial(\rho_0 a_0^2)}{\partial y} - \rho_0 a_0^2 \frac{\partial}{\partial y} & -i\omega + i\beta u_0 & -\rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega + i\beta u_0 \end{vmatrix}$$

Х. Приложение 3

Функции \mathbf{A}_j ($j = 1 \div 4$), входящие в регулярное решение (16).

$$\mathbf{A}_1 = \left(\int_0^x Q(\xi) d\xi - \frac{1}{x_*} \right) \exp \left(- \int_{x_*}^x W_{nn}(\eta) d\eta \right) \Phi_n, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\Phi}{(x - x_*)} \left[\exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{x_*}^x (\alpha_s - \alpha_n(\eta)) d\eta \right) - 1 \right],$$

$$\mathbf{A}_3 = -\frac{\Phi_n}{(x - x_*)} \left[\exp \left(- \int_{x_*}^x W_{nn}(\eta) d\eta \right) - 1 \right], \quad \mathbf{A}_4 = \left(\frac{\Phi - \Phi_n}{x - x_*} \right)$$

Регулярная функция $Q(\xi)$ имеет следующую структуру (штрихом обозначена производная по x):

$$Q(\xi) = [V'(x_*) - W(x_*)] W_{nn}(x_*) + \frac{V(\xi) - 1 - V'(x_*)(\xi - x_*)}{(\xi - x_*)^2} - \left(\frac{W(\xi) - W(x_*)}{\xi - x_*} \right) +$$

$$+ \frac{1}{(\xi - x_*)^2} \left[\exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{x_*}^{\xi} (\alpha_s - \alpha_n(\eta)) d\eta \right) - 1 \right] + \frac{1}{(\xi - x_*)^2} \left[\exp \left(\int_{x_*}^{\xi} W_{nn}(\eta) d\eta \right) - 1 - W_{nn}(x_*)(\xi - x_*) \right]$$

Амплитудный коэффициент b , входящий в регулярное решение Φ , равен

$$b = \frac{i\tau B_\infty \exp(i\sigma_s \delta(x_*))}{\sigma_s}$$